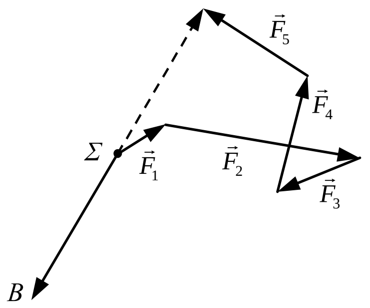
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ
1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. Για να μη μετακινηθεί το σώμα χρειάζεται να εφαρμοστεί δύναμη

$$\overrightarrow{\Sigma B}=-\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4+\vec{F}_5\right).$$

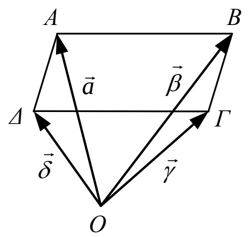


2. (i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$$

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\delta}-\vec{\gamma}$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}\,.$$



Άρα, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$$

$$|\overrightarrow{\Gamma A}|=|\overrightarrow{\Delta B}|$$

$$(\Gamma A)=(B\Delta)$$

Άρα, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει ίσες διαγώνιες.

(iii) Από τα ερωτήματα (i) και (ii) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαγώνιες, άρα είναι ορθογώνιο.

3. (i) $\vec{x}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ (ii) $\vec{x}=-\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ (iii) $\vec{x}=\vec{\zeta}-\vec{\varepsilon}-\vec{\delta}+\vec{\gamma}-\vec{\beta}-\vec{\alpha}$.

4. Έχουμε διαδοχικά:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Gamma}$$

$$\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Gamma E}$$

Άρα, το τετράπλευρο *ΒΔΓΕ* είναι παραλληλόγραμμο.

5. Έχουμε:

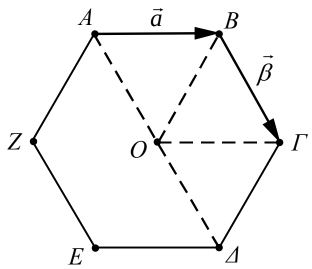
$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{O\Delta})$$

$$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}$$

$$=\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma})+\overrightarrow{O\Delta}$$

$$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta}\ .$$

6. Έστω O το κέντρο του εξαγώνου. Γνωρίζουμε ότι οι πλευρές του κανονικού εξαγώνου είναι ίσες με την ακτίνα του. Επομένως $(AB)=(B\Gamma)=(\Gamma\Delta)=(OA)=(OB)=(O\Gamma)=(O\Delta)$ και άρα τα τετράπλευρα *ΟΑΒΓ* και *ΟΒΓΔ* είναι ρόμβοι. Έτσι έχουμε



$$\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}\ .$$

7. Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς έχουμε:

$$\overrightarrow{P_1P_3}+\overrightarrow{P_2P_4}+\overrightarrow{P_3P_5}+\overrightarrow{P_4P_6}+\overrightarrow{P_5P_1}+\overrightarrow{P_6P_2}=$$

$$=\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_4}-\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_5}-\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_6}-\overrightarrow{OP_4}+\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OP_5}+\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_6}=\vec{0}\ .$$

1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

Το διάνυσμα $\vec{\alpha}_0$ είναι γινόμενο του θετικού αριθμού $\frac{1}{|\vec{\alpha}|}$ με το $\vec{\alpha}$, επομένως είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο ίσο με $|\vec{\alpha}_0|=\left|\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\cdot\vec{\alpha}\right|=\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\cdot|\vec{\alpha}|=1$.

2. (i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{\alpha})=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{\beta})$$
$$3(\vec{x}+\vec{\alpha})=2(\vec{x}+\vec{\beta})$$
$$3\vec{x}+3\vec{\alpha}=2\vec{x}+2\vec{\beta}$$
$$\vec{x}=2\vec{\beta}-3\vec{\alpha}$$

(ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$\vec{x}+3(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=4(\vec{\alpha}-\vec{\beta})-3\vec{x}$$
$$\vec{x}+3\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=4\vec{\alpha}-4\vec{\beta}-3\vec{x}$$
$$\vec{x}+3\vec{x}=4\vec{\alpha}-4\vec{\beta}-3\vec{\beta}-3\vec{\alpha}$$
$$4\vec{x}=\vec{\alpha}-7\vec{\beta}$$
$$\vec{x}=\frac{1}{4}\vec{\alpha}-\frac{7}{4}\vec{\beta}$$

3. Έχουμε διαδοχικά:

$$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{M\Gamma}$$
$$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AM})$$
$$\vec{x}-\vec{\beta}=2(\vec{\gamma}-\vec{x})$$
$$\vec{x}-\vec{\beta}=2\vec{\gamma}-2\vec{x}$$
$$3\vec{x}=\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$$
$$\vec{x}=\frac{1}{3}(\vec{\beta}+2\vec{\gamma})$$

4. (i) Προφανώς είναι $\overrightarrow{\Delta B}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$.

- Έχουμε διαδοχικά:

$$\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{\Delta B}$$

$$2\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{\Delta B}$$

$$3\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{\Delta B}$$

$$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Delta B}\,.$$

Άρα, $\overrightarrow{EB}=\frac{1}{3}(\vec{\beta}+\vec{\alpha})$

- Έχουμε: $\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{\Delta \Gamma}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$

- Έχουμε διαδοχικά:

$$\overrightarrow{\Delta E}=2\overrightarrow{EB}$$

$$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}=2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE})$$

$$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AE}$$

$$3\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}$$

$$3\overrightarrow{AE}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})$$

- Έχουμε διαδοχικά:

$$\overrightarrow{\Delta E}=2\overrightarrow{EB}$$

$$\overrightarrow{\Gamma E}-\overrightarrow{\Gamma \Delta}=2(\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{\Gamma E})$$

$$\overrightarrow{\Gamma E}-\overrightarrow{\Gamma \Delta}=2\overrightarrow{\Gamma B}-2\overrightarrow{\Gamma E}$$

$$3\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{\Gamma \Delta}+2\overrightarrow{\Gamma B}$$

$$3\overrightarrow{\Gamma E}=-2\vec{\alpha}+2(\vec{\beta}-\vec{\alpha})$$

$$3\overrightarrow{\Gamma E}=2\vec{\beta}-4\vec{\alpha}$$

$$\overrightarrow{\Gamma E}=\frac{1}{3}(2\vec{\beta}-4\vec{\alpha})$$

$$\overrightarrow{E\Gamma}=\frac{1}{3}(4\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=\frac{2}{3}(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})\,.$$

(ii) Έχουμε $\overrightarrow{E\Gamma}=\frac{2}{3}(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ και $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})$, επομένως $\overrightarrow{E\Gamma}=2\overrightarrow{AE}$ και άρα τα A,E και Γ είναι συνευθειακά.

5. Έχουμε $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}=3\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=3(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$. Επομένως $\overrightarrow{\Gamma E}=3\overrightarrow{A\Gamma}$ και άρα τα A,Γ και E είναι συνευθειακά.

6. Με σημείο αναφοράς ένα από τα K, Λ, M, για παράδειγμα το K, η ισότητα γράφεται διαδοχικά:

$$-\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KB}-2(\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB})=(\overrightarrow{K\Lambda}-\overrightarrow{KB})+3(\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{KA})$$

$$-\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{K\Lambda}-\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KM}-3\overrightarrow{KA}$$

$$\overrightarrow{K\Lambda}=-3\overrightarrow{KM}\ .$$

Άρα τα K, Λ, M είναι συνευθειακά.

7. Έχουμε
$$\begin{aligned}\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B})\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B})\\&=\frac{1}{2}\cdot\vec{0}=\vec{0}\ .\end{aligned}$$

8. Έχουμε
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{O\Lambda}+\overrightarrow{OM}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\\&=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{O\Gamma})\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}\ .\end{aligned}$$

9. Έχουμε
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta})+(\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta})\\&=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{\Gamma N}\\&=2(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{\Gamma N})\\&=-2(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{N\Gamma})\end{aligned}$$

$$=-2\cdot 2\overrightarrow{NM}\ =4\overrightarrow{MN}$$

10. Έχουμε $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{\Gamma A}$

$$=-\mu\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AB}$$

$$=(\lambda-\mu)\overrightarrow{AB}$$

Ώστε $\overrightarrow{AB}=(\lambda-\mu)\overrightarrow{AB}$ και επομένως $\lambda-\mu=1$.

11. Έχουμε $\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}$

$$=(\lambda\overrightarrow{AB}+\kappa\overrightarrow{A\Gamma})-(\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma})$$

$$=(\lambda-\kappa)\overrightarrow{AB}-(\lambda-\kappa)\overrightarrow{A\Gamma}$$

$$=(\lambda-\kappa)(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma})$$

$$=(\lambda-\kappa)\overrightarrow{\Gamma B}$$

$$=(\kappa-\lambda)\overrightarrow{B\Gamma}\ .$$

Άρα $\overrightarrow{\Delta E}//\overrightarrow{B\Gamma}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Έχουμε

$$x\vec{\alpha}+y\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow x\vec{\alpha}=-y\vec{\beta}$$

Αν υποθέσουμε ότι $x\neq 0$, τότε θα είναι $\vec{\alpha}=-\dfrac{y}{x}\vec{\beta}$, οπότε θα έχουμε $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$, που είναι άτοπο. Επομένως $x=0$, οπότε $-y\vec{\beta}=\vec{0}$ και άρα $y=0$.

(ii) Έχουμε

$$x_1\vec{\alpha}+y_1\vec{\beta}=x_2\vec{\alpha}+y_2\vec{\beta}\Leftrightarrow (x_1-x_2)\vec{\alpha}+(y_1-y_2)\vec{\beta}=\vec{0}\ .$$

Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, $x_1-x_2=0$ και $y_1-y_2=0$, οπότε $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$.

(iii) Τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι συγγραμμικά, αν και μόνο αν $\vec{u}=\kappa\vec{v}$, δηλαδή $(x-1)\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\kappa(2+3x)\vec{\alpha}-2\kappa\vec{\beta}$ ή, ισοδύναμα, $(x-1-2\kappa-3\kappa x)\vec{\alpha}+(2\kappa+1)\vec{\beta}=\vec{0}$. Σύμφωνα, όμως, με το (i) ερώτημα, αυτό συμβαίνει, αν και μόνο αν $x-1-2\kappa-3\kappa x=0$ και $2\kappa+1=0$, δηλαδή $\kappa=-1/2$ και $x=0$.

2. Έχουμε

$$\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{AZ}-\overrightarrow{AE}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}-\kappa\cdot\overrightarrow{A\Delta}$$

$$\overrightarrow{E\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}-\kappa\,\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}+(1-\kappa)\,\overrightarrow{A\Delta}.$$

Επειδή $\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}=1$, έχουμε $\lambda=\frac{\kappa}{\kappa-1}$ επομένως

$$\overrightarrow{EZ}=\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\overrightarrow{AB}-\kappa\,\overrightarrow{A\Delta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{E\Gamma}=\overrightarrow{AB}-(\kappa-1)\,\overrightarrow{A\Delta}.$$

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{E\Gamma}=\frac{\kappa-1}{\kappa}\cdot\overrightarrow{EZ}$. Άρα $\overrightarrow{E\Gamma}\,/\!/\,\overrightarrow{EZ}$, οπότε τα E, Γ, Z είναι συνευθειακά.

3. • Έστω $x\overrightarrow{KA}+y\overrightarrow{KB}+z\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}$ και $x+y+z=0$. Τότε έχουμε

$$x(\overrightarrow{\Lambda A}-\overrightarrow{\Lambda K})+y(\overrightarrow{\Lambda B}-\overrightarrow{\Lambda K})+z(\overrightarrow{\Lambda\Gamma}-\overrightarrow{\Lambda K})=\vec{0}$$

$$-(x+y+z)\,\overrightarrow{\Lambda K}+x\,\overrightarrow{\Lambda A}+y\,\overrightarrow{\Lambda B}+z\,\overrightarrow{\Lambda\Gamma}=\vec{0}$$

$$x\,\overrightarrow{\Lambda A}+y\,\overrightarrow{\Lambda B}+z\,\overrightarrow{\Lambda\Gamma}=\vec{0}$$

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι: αν $x\overrightarrow{\Lambda A}+y\overrightarrow{\Lambda B}+z\overrightarrow{\Lambda\Gamma}=0$ και $x+y+z=0$, τότε $x\overrightarrow{KA}+y\overrightarrow{KB}+z\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}$.

• Έστω $x\overrightarrow{KA}+y\overrightarrow{KB}+z\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}$ και $x\overrightarrow{\Lambda A}+y\overrightarrow{\Lambda B}+z\overrightarrow{\Lambda\Gamma}=\vec{0}$. Τότε έχουμε

$$(x\overrightarrow{KA}+y\overrightarrow{KB}+z\overrightarrow{K\Gamma})-(x\overrightarrow{\Lambda A}+y\overrightarrow{\Lambda B}+z\overrightarrow{\Lambda\Gamma})=\vec{0}$$

$$x(\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{\Lambda A})+y(\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{\Lambda B})+z(\overrightarrow{K\Gamma}-\overrightarrow{\Lambda\Gamma})=\vec{0}$$

$$x\overrightarrow{K\Lambda}+y\overrightarrow{K\Lambda}+z\overrightarrow{K\Lambda}=\vec{0}$$

$$(x+y+z)\overrightarrow{K\Lambda}=\vec{0}$$

και, επειδή $\overrightarrow{K\Lambda}\neq\vec{0}$, έχουμε $x+y+z=0$.

4. • Έχουμε $$\overrightarrow{MA}=-\frac{\kappa}{\lambda}\cdot\overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=-\frac{\kappa}{\lambda}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$

$$\lambda\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OM}=-\kappa\overrightarrow{OB}+\kappa\overrightarrow{OM}$$

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\kappa\overrightarrow{OB}=(\kappa+\lambda)\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\lambda\overrightarrow{OA}+\kappa\overrightarrow{OB}}{\kappa+\lambda}$$

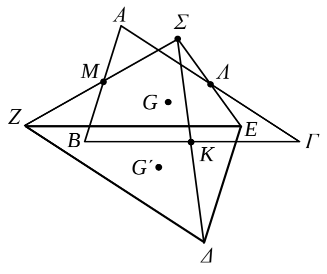
άρα $$\vec{r}=\frac{\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}}{\kappa+\lambda}.$$

• Έχουμε $\overrightarrow{MA}=\frac{\kappa}{\lambda}\overrightarrow{MB}$ και ομοίως βρίσκουμε ότι $\vec{r}=\frac{\lambda\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}}{\lambda-\kappa}$.

5. Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{\Sigma G}//\overrightarrow{\Sigma G'}$. Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε έχουμε:

$$\overrightarrow{\Sigma G}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{O\Sigma}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})-\overrightarrow{O\Sigma} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Sigma G'}&=\overrightarrow{OG'}-\overrightarrow{O\Sigma}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OZ})-\overrightarrow{O\Sigma}\\&=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{O\Sigma}+2\overrightarrow{O\Lambda}-\overrightarrow{O\Sigma}+2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\Sigma})-\overrightarrow{O\Sigma}\\&=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{O\Lambda}+\overrightarrow{OM})-2\overrightarrow{O\Sigma}\\&=2\cdot\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{O\Lambda}+\overrightarrow{OM})-\overrightarrow{O\Sigma}\right]=2(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{O\Sigma})=2\overrightarrow{\Sigma G}.\end{aligned}$$



Επομένως $\overrightarrow{\Sigma G'}//\overrightarrow{\Sigma G}$ και άρα τα Σ, G και G' είναι συνευθειακά.

6. Αν πάρουμε ως σημείο αναφοράς μια κορυφή του τετραπλεύρου, για παράδειγμα την A, τότε έχουμε:

$$4\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{B\Gamma}$$

$$4(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{A\Delta}-(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB})$$

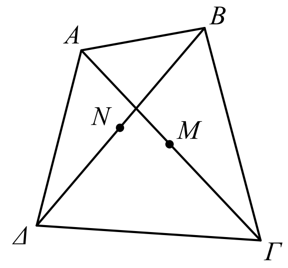
$$4\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta})-\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}\right]=\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AB}$$

$$2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{A\Delta}-2\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{A\Gamma}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$$

$$\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}\,.$$



Άρα, το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

7. Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{\Gamma\Gamma'} &=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma'}-\overrightarrow{O\Gamma}\\ &=(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{O\Gamma'})-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})\\ &=3\overrightarrow{OG'}-3\overrightarrow{OG}\\ &=3(\overrightarrow{OG'}-\overrightarrow{OG})=3\overrightarrow{GG'}\end{aligned}$$

8. Με σημείο αναφοράς το A έχουμε:

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{M\Gamma} &=-3\overrightarrow{AM}-5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})+2(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AM})\\ &=-3\overrightarrow{AM}+5\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AM}-5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{A\Gamma}\\ &=2\overrightarrow{A\Gamma}-5\overrightarrow{AB}\quad \text{που είναι σταθερό διάνυσμα.}\end{aligned}$$

9. Έχουμε $\quad \vec{r}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}=\vec{\beta}+y\,\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}+y(\vec{\beta}-\vec{\alpha})$

και $\quad \vec{r}=\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma E}=5\vec{\alpha}+x\,\overrightarrow{\Gamma\Delta}=5\vec{\alpha}+x(3\vec{\beta}-5\vec{\alpha})\,.$

Επομένως, $\quad \vec{\beta}+y(\vec{\beta}-\vec{\alpha})=5\vec{\alpha}+x(3\vec{\beta}-5\vec{\alpha})$

$$(1+y-3x)\vec{\beta}=(y+5-5x)\vec{\alpha}\,.$$

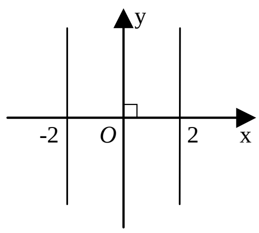
Επειδή τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, η τελευταία ισότητα αληθεύει μόνο αν $1+y-3x=0$ και $y+5-5x=0$. Έτσι έχουμε το σύστημα $\begin{cases} y=3x-1 \\ y=5x-5 \end{cases}$ από το οποίο βρίσκουμε $x=2$ και $y=5$.

Επομένως $\vec{r}=\vec{\beta}+5(\vec{\beta}-\vec{\alpha})$, δηλαδή $\vec{r}=-5\vec{\alpha}+6\vec{\beta}$.

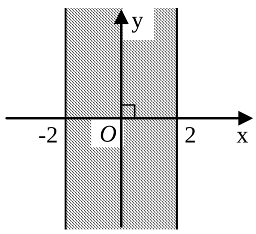
1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

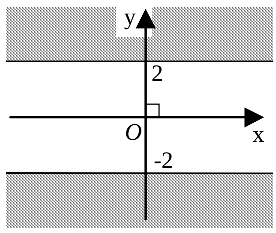
1. (i) $|x|=2 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=2$



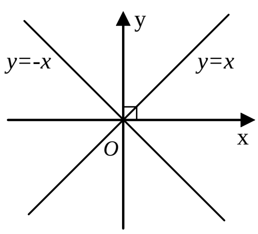
(ii) $|x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$



(i) $|y|>2 \Leftrightarrow y<-2$ ή $y>2$



(i) $|x|=|y| \Leftrightarrow x=y$ ή $x=-y$



2. Η απόσταση ενός σημείου $K(\mu,\nu)$ από τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι $|\nu|$ και $|\mu|$ αντιστοίχως. Έτσι έχουμε:

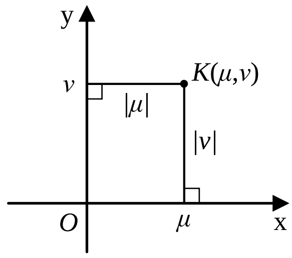
Για το A : 2 και 1

Για το B : 4 και 3

Για το Γ : 6 και 5

Για το Δ : $|\beta+2|$ και $|\alpha-1|$

Για το M : $|y|$ και $|x|$.



3. (i) Για να είναι $\vec{\alpha}=\vec{0}$ αρκεί $\lambda^2-4=0$ και $\lambda^2-3\lambda+2=0$, οπότε $\lambda=2$.

(ii) Για να είναι $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}//x'x$ αρκεί $\lambda^2-4\neq 0$ και $\lambda^2-3\lambda+2=0$, οπότε $\lambda=1$.

4. Για να είναι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ αρκεί να είναι $\lambda^2-3\lambda+2=\lambda^2-5\lambda+6$ και $2\lambda^2-3\lambda-2=-3\lambda^2+7\lambda-2$. Έτσι έχουμε το σύστημα $\begin{cases} 2\lambda=4 \\ 5\lambda^2-10\lambda=0 \end{cases}$, οπότε $\lambda=2$.

5. Έχουμε $\vec{\alpha}//\vec{\beta}=\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$.

Για $x=2$ είναι $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(4,2)=2(2,1)=2\vec{\alpha}$, δηλαδή $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

Για $x=-2$ είναι $\vec{\alpha}=(-2,1)$ και $\vec{\beta}=(4,-2)=-2(-2,1)=-2\vec{\alpha}$, δηλαδή $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\alpha}$.

Άρα η ζητούμενη τιμή του x είναι η $x=2$.

6. Ένα διάνυσμα συγγραμμικό με το $\vec{u}$ θα έχει τη μορφή $\lambda\vec{u}$ και αφού θα έχει και διπλάσιο μέτρο πρέπει $|\lambda\vec{u}|=2|\vec{u}|$. Επομένως $|\lambda|\cdot|\vec{u}|=2|\vec{u}|$. Άρα $|\lambda|=2$ οπότε $\lambda=\pm 2$. Άρα, το ζητούμενο διάνυσμα είναι ή το (6,8) ή το (-6,-8).

7. (α) $\overrightarrow{O\Gamma}=\frac{1}{2}\vec{i}$, $\overrightarrow{O\Delta}=\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$, $\overrightarrow{OZ}=2\vec{j}$, $\overrightarrow{OK}=2\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$, $\overrightarrow{OH}=2\vec{i}+\vec{j}$.

(β) $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{K\Lambda}=-\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$, $\overrightarrow{H\Delta}=-\vec{i}$, $\overrightarrow{K\Delta}=-\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$, $\overrightarrow{H\Theta}=-\frac{1}{2}\vec{i}$, $\overrightarrow{Z\Lambda}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\overrightarrow{KZ}=-2\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}$.

8. (i) Έστω $M(x,0)$ το σημείο του άξονα $x'x$ που ισαπέχει από τα σημεία A και B. Τότε έχουμε:

$$(MA)=(MB)\Leftrightarrow|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{MA}|^2=|\overrightarrow{MB}|^2\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{MB}^2$$
$$\Leftrightarrow(x+1)^2+6^2=(x+9)^2+2^2\Leftrightarrow 16x=-48\Leftrightarrow x=-3\,.$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(-3,0)$.

(ii) Έστω $N(0,y)$ το σημείο του άξονα $y'y$ που ισαπέχει από τα A και B. Με ανάλογο τρόπο όπως στο (i) βρίσκουμε $y=-3$ και άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $N(0,-3)$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$, $\Delta(x_4,y_4)$ και $E(x_5,y_5)$ είναι οι κορυφές του πενταγώνου, τότε έχουμε τα συστήματα.

$$\Sigma_1:\begin{cases}x_1+x_2=3\\x_2+x_3=6\\x_3+x_4=8\\x_4+x_5=6\\x_5+x_1=3\end{cases}\qquad\text{και}\qquad\Sigma_2:\begin{cases}y_1+y_2=5\\y_2+y_3=7\\y_3+y_4=5\\y_4+y_5=2\\y_5+y_1=1\end{cases}$$

- Με πρόσθεση των εξισώσεων του Σ_1 κατά μέλη βρίσκουμε

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=13\,.$$

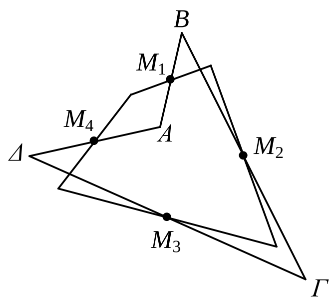
Όμως $x_2+x_3=6$ και $x_4+x_5=6$, επομένως $x_1+12=13$, άρα $x_1=1$ και διαδοχικά βρίσκουμε $x_2=2$, $x_3=4$, $x_4=4$, $x_5=1$.

- Με ανάλογο τρόπο επιλύουμε το σύστημα Σ_2 και βρίσκουμε $y_1=1$, $y_2=4$, $y_3=3$, $y_4=2$, $y_5=0$.

Επομένως οι κορυφές του πενταγώνου είναι τα σημεία $A(1,1)$, $B(2,4)$, $\Gamma(4,3)$, $\Delta(4,2)$ και $E(1,0)$.

2. Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι τα σημεία, τότε τα x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-(\lambda^2-4\lambda+3)x-17=0$. Η τετμημένη του μέσου του τμήματος AB είναι ίση με $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\lambda^2-4\lambda+3}{2}$ και επομένως $\frac{\lambda^2-4\lambda+3}{2}=4 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda-5=0$ και άρα $\lambda=5$ ή $\lambda=-1$.

3. Τα σημεία M_1, M_2, M_3 και M_4 είναι μέσα διαδοχικών πλευρών τετραπλεύρου, όχι κατανάγκη κυρτού, αν και μόνο αν $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_4M_3}$. Πράγματι·



- Αν τα M_1, M_2, M_3, M_4 είναι μέσα διαδοχικών πλευρών τετραπλεύρου, τότε το $M_1M_2M_3\,M_4$ θα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα ισχύει $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_4M_3}$.

- *Αντιστρόφως*, αν $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_4M_3}$, τότε τα M_1, M_2, M_3, M_4 θα είναι μέσα διαδοχικών πλευρών τετραπλεύρου. Πράγματι· έστω *Α* ένα σημείο εκτός της ευθείας M_1M_2, *Β* το συμμετρικό του *Α* ως προς το M_1, *Γ* το συμμετρικό του *Β* ως προς το M_2 και *Δ* το συμμετρικό του *Γ* ως προς το M_3. Αν δείξουμε ότι το M_4 είναι το μέσο του *ΔΑ*, τότε το ζητούμενο τετράπλευρο θα είναι το *ΑΒΓΔ*. Ας υποθέσουμε ότι M_4' είναι το μέσο της πλευράς *ΑΔ*. Τότε, όπως είδαμε πριν, θα ισχύει $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_4'M_3}$, οπότε θα έχουμε $\overrightarrow{M_4M_3}=\overrightarrow{M_4'M_3}$ και άρα τα M_4 και M_4' θα συμπίπτουν.

Έχουμε τώρα:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_4M_3} \Leftrightarrow (\kappa_2-\kappa_1, \lambda_2-\lambda_1)=(\kappa_3-\kappa_4, \lambda_3-\lambda_4)$$

$$\Leftrightarrow \kappa_1+\kappa_3=\kappa_2+\kappa_4 \quad \text{και} \quad \lambda_1+\lambda_3=\lambda_2+\lambda_4 .$$

Επομένως, ζητούμενη συνθήκη είναι:

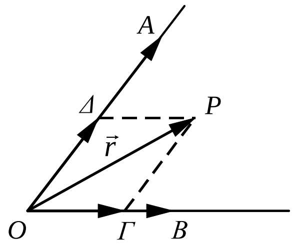
$$\kappa_1+\kappa_3=\kappa_2+\kappa_4 \quad \text{και} \quad \lambda_1+\lambda_3=\lambda_2+\lambda_4 .$$

4. Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha_1,\beta_1)$, $B(\alpha_2,\beta_2)$ και $\Gamma(x,y)$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$(\Gamma A)+(\Gamma B)\geq(AB)$$

$$\sqrt{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2}+\sqrt{(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2}\geq\sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2}\,.$$

5. Σχεδιάζουμε τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{r}$ με κοινή αρχή O και έστω $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$. Από το πέρας P του $\vec{r}$ φέρνουμε παράλληλες προς τους φορείς των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο $O\Gamma P\Delta$.



Θα είναι $\overrightarrow{O\Delta}=x\cdot\overrightarrow{OA}=x\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=y\cdot\overrightarrow{OB}=y\vec{\beta}$, όπου $x,y\in\mathbf{R}$. Από τον κανόνα του παραλληλόγραμμου έχουμε $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{O\Gamma}$, δηλαδή $\vec{r}=x\vec{\alpha}+y\vec{\beta}$, που είναι και η ζητούμενη έκφραση.

Θα αποδείξουμε ότι οι αριθμοί x και y είναι μοναδικοί.

Έστω ότι ισχύει και $\vec{r}=x'\vec{\alpha}+y'\vec{\beta}$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$x\vec{\alpha}+y\vec{\beta}=x'\vec{\alpha}+y'\vec{\beta}$$
$$(x-x')\vec{\alpha}=(y'-y)\vec{\beta}\,.$$

Αν ήταν $x-x'\neq0$, δηλαδή $x\neq x'$, τότε $\vec{\alpha}=\dfrac{y'-y}{x-x'}\cdot\vec{\beta}$ που σημαίνει ότι $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$ που είναι άτοπο. Επομένως $x=x'$, οπότε και $y=y'$. Άρα το $\vec{r}$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Έχουμε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(-1)\cdot2+3\cdot5=-2+15=13$$

$$(2\vec{\alpha})\cdot(-3\vec{\beta})=-6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-6\cdot13=-78$$

$$\begin{aligned}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})&=3\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2\\&=3(1^2+3^2)-2\cdot13-(2^2+5^2)\\&=30-26-29\\&=-25\end{aligned}$$

(ii) Έχουμε $\vec{u}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow (\kappa,\lambda)(2{,}5)=0 \Leftrightarrow 2\kappa+5\lambda=0$.

Τα διανύσματα $\vec{u}$ είναι κάθετα στο $\vec{\beta}$ και μεταξύ τους συγγραμμικά.

2. Έχουμε

$$\vec{u}\cdot(7\vec{v}+\vec{w})=7\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=7(4+4)+(6+0)=56+6=62$$

$$|\vec{u}|(\vec{v}\cdot\vec{w})=\sqrt{5}\cdot 24=24\sqrt{5}$$

$$|(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}|=|8\vec{w}|=8|\vec{w}|=8\cdot 6=48$$

$$(|\vec{u}|\vec{v})\cdot\vec{w}=|\vec{u}|(\vec{v}\cdot\vec{w})=\sqrt{5}\cdot 24=24\sqrt{5}$$

3. (i) Πρέπει $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})=0$. Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})=\vec{\alpha}^2+\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1+\lambda\cdot 1=\lambda+1$. Επομένως $\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$.

(ii) Ομοίως $\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}^2=0 \Leftrightarrow 1+2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$.

4. Έστω $\vec{v}=(x,y)$ το διάνυσμα που ζητάμε. Τότε θα ισχύει:

$$\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=0\\ |\vec{v}|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-2y=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}.$$

Από τη λύση του συστήματος βρίσκουμε

$$(x,y)=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \text{ ή } (x,y)=\left(-\frac{2}{\sqrt{13}},-\frac{3}{\sqrt{13}}\right).$$

5. Έχουμε

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

$$\Leftrightarrow (3\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\kappa\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow 3\kappa\vec{\alpha}^2+6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta}-2\vec{\beta}^2=0$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\kappa\cdot 4+6\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}-\kappa\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}-2\cdot 9=0 \Leftrightarrow \kappa=0$$

6. (i) Έχουμε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow 4\kappa+3=0 \Leftrightarrow \kappa=-\frac{3}{4}$$

(ii) Έχουμε

$$|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\text{συν}\frac{\pi}{4}=4\kappa+3\Leftrightarrow\sqrt{\kappa^2+1}\cdot\sqrt{4^2+3^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4\kappa+3$$
$$\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\kappa^2+1}=4\kappa+3$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{\kappa^2+1}\cdot5\sqrt{2}=8\kappa+6\,.$$

Υψώνουμε τα μέλη της τελευταίας εξίσωσης στο τετράγωνο και βρίσκουμε $7\kappa^2+48\kappa-7=0$ και έχουμε $\kappa=1/7$ ή $\kappa=-7$. Από τις τιμές αυτές του κ μόνο η $\kappa=1/7$ επαληθεύει την εξίσωση. Άρα $\kappa=1/7$.

(iii) $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\kappa & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow3\kappa-4=0\Leftrightarrow\kappa=\frac{4}{3}$.

7. Αν φ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, τότε $\text{συν}\varphi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$. Όμως είναι

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=2|\vec{\alpha}|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-4|\vec{\beta}|^2$$
$$=2|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-4|\vec{\beta}|^2=2+2\cdot1\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-4=-3\,.$$
$$|\vec{u}|^2=(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta})^2=4\vec{\alpha}^2+16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+16\vec{\beta}^2=4+16\left(-\frac{1}{2}\right)+16=12\,,$$

οπότε $\quad|\vec{u}|=2\sqrt{3}$.

$$|\vec{v}|^2=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=3\,,$$

οπότε $\quad|\vec{v}|=\sqrt{3}$.

Επομένως $\quad\text{συν}\varphi=\frac{-3}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$, άρα $\quad\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

8. Έχουμε $\quad\vec{\alpha}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

$$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\Leftrightarrow\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}\,.$$

9. Έχουμε $\quad\vec{u}\cdot\vec{v}=(|\vec{\alpha}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{\alpha})(|\vec{\alpha}|\vec{\beta}-|\vec{\beta}|\vec{\alpha})$

$$=|\vec{\alpha}|^2\vec{\beta}^2-|\vec{\beta}|^2\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-|\vec{\beta}|^2|\vec{\alpha}|^2=0\,.$$

10. Έχουμε $\quad \vec{v}\cdot\vec{\beta}=(\vec{\beta}^2\vec{\alpha}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}=|\vec{\beta}|^2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})|\vec{\beta}|^2=0$.

11. (i) Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(6-3,-4+2)=(3,-2)$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=(-1-1,2-5)=(-2,-3)$.

Επομένως $\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}=(3,-2)\cdot(-2,-3)=-6+6=0$.

(ii) Επειδή $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}=0$, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι κάθετα.

12. Έστω $\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{p}$, όπου $\vec{p}\perp\vec{\alpha}$. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}&=\lambda\vec{\alpha}^2+\vec{p}\cdot\vec{\alpha}\\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}&=\lambda|\vec{\alpha}|^2\\ 2(-8)+(-4)\cdot 5&=\lambda\cdot 20\\ -36&=20\lambda\\ \lambda&=-\frac{36}{20}=-\frac{9}{5}\end{aligned}$$

Επομένως $\quad \vec{\beta}=-\frac{9}{5}\vec{\alpha}+\vec{p}$

$$\vec{p}=\vec{\beta}+\frac{9}{5}\vec{\alpha}=(-8,5)+\frac{9}{5}(2,-4)=\left(-\frac{22}{5},-\frac{11}{5}\right)$$

Τελικά $\quad \vec{\beta}=-\frac{9}{5}\vec{\alpha}+\left(-\frac{22}{5},-\frac{11}{5}\right)$.

13. Η μια διαγώνιος του παραλληλόγραμμου θα έχει μήκος ίσο με $|(5\vec{\alpha}+2\vec{\beta})+(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})|$ και η άλλη ίσο με $|(5\vec{\alpha}+2\vec{\beta})-(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})|$.

Έχουμε $\quad |(5\vec{\alpha}+2\vec{\beta})+(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})|=|6\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$, $\quad$ οπότε

$$\begin{aligned}|6\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2&=(6\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2\\ &=36\vec{\alpha}^2-12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2\\ &=36|\vec{\alpha}|^2-12\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\text{συν}45^0+|\vec{\beta}|^2\\ &=36\cdot 8-12\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+9\\ &=288-72+9\\ &=225, \qquad \text{οπότε} \qquad |6\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=15 .\end{aligned}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$|(5\vec{\alpha}+2\vec{\beta})-(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})|=|4\vec{\alpha}+5\vec{\beta}|=\sqrt{593} .$$

14. Έχουμε $\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

$$=\overrightarrow{A\Delta}\cdot\text{Προβ}_{\overrightarrow{A\Delta}}\overrightarrow{AB}=5\cdot 3(-1)=-15$$

β΄ τρόπος: $\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=(-3,4)\cdot(5,0)=-15$.

15. (i) $\quad |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\Leftrightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|)^2$

$$\Leftrightarrow(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|)^2$$

$$\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|^2$$

$$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|^2$$

$$\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$$

$$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$$

$$\Leftrightarrow\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=1$$

$$\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\,.$$

(ii) $\quad \big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\Leftrightarrow(|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|)^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2$

$$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$$

$$\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$$

$$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$$

$$\Leftrightarrow\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=-1$$

$$\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\,.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $\quad \lambda^2\vec{\alpha}^2+2\lambda\mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\mu^2\vec{\beta}^2\geq 0\Leftrightarrow(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta})^2\geq 0$, $\quad$ που ισχύει.

Το "=" ισχύει, αν και μόνο αν $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\vec{0}$ ή, ισοδύναμα, $\lambda\vec{\alpha}=-\mu\vec{\beta}$.

Αν $\lambda\neq 0$, τότε $\vec{\alpha}=\frac{-\mu}{\lambda}\vec{\beta}$, οπότε $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$, που είναι άτοπο.

Επομένως $\lambda=0$, οπότε $\mu\vec{\beta}=\vec{0}$ και άρα $\mu=0$.
Άρα το "=" ισχύει, αν και μόνο αν $\lambda=\mu=0$.

2. (i) Έχουμε $$|u+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{u}-\vec{v})^2$$
$$=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2+\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$$
$$=2\vec{u}^2+2\vec{v}^2=2|\vec{u}|^2+2|\vec{v}|^2$$

(ii) Έχουμε $$\frac{1}{4}|\vec{u}+\vec{v}|^2-\frac{1}{4}|\vec{u}-\vec{v}|^2=\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v})^2-\frac{1}{4}(\vec{u}-\vec{v})^2$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2)-\frac{1}{4}(\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2)$$
$$=\frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}\,.$$

3. (i) Αν ω είναι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το $\vec{u}$ σχηματίζει με το $\vec{\alpha}$ γωνία φ_1 και με το $\vec{\beta}$ γωνία φ_2, τότε έχουμε:

$$\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$$
$$\vec{\alpha}\cdot\vec{u}=|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\alpha}|\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$
$$|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{u}|\text{συν}\varphi_1=|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|\text{συν}\omega$$
$$|\vec{u}|\cdot\text{συν}\varphi_1=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|(1+\text{συν}\omega)$$
$$\text{συν}\varphi_1=\frac{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}{|\vec{u}|}(1+\text{συν}\omega)\,. \qquad (1)$$

Ομοίως έχουμε: $$\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$$
$$\vec{\beta}\cdot\vec{u}=|\vec{\beta}|\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}^2$$
$$|\vec{\beta}|\cdot|\vec{u}|\text{συν}\varphi_2=|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\text{συν}\omega+|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|^2$$
$$|\vec{u}|\cdot\text{συν}\varphi_2=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|(1+\text{συν}\omega)$$
$$\text{συν}\varphi_2=\frac{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}{|\vec{u}|}(1+\text{συν}\omega)\,. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $\text{συν}\varphi_1=\text{συν}\varphi_2$, άρα $\varphi_1=\varphi_2$.

(ii) $$\vec{u}\cdot\vec{v}=(|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta})(|\vec{\beta}|\vec{\alpha}-|\vec{\alpha}|\vec{\beta})$$

$$=|\vec{\beta}|^2\,\vec{\alpha}^2-|\vec{\alpha}|^2\,\vec{\beta}^2=\vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2-\vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2=0\,.$$

Επομένως $\vec{u}\perp\vec{v}$ και επειδή ο φορέας των $\vec{u}$ διχοτομεί τη γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, ο φορέας των $\vec{v}$ διχοτομεί την παραπληρωματική γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

4. Έχουμε διαδοχικά:

$$2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$$

$$2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma}$$

$$4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\vec{\gamma}^2$$

$$4\cdot 4+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+1=9$$

$$\boldsymbol{\vec{\alpha}\vec{\beta}=-2} \qquad (1)$$

Αν εργαστούμε αναλόγως, βρίσκουμε ότι:

$$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=3 \quad \text{και} \quad \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-6\,. \qquad (2)$$

Έτσι, λόγω των (1) και (2), έχουμε

$$\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\vec{\alpha}=-2+3-6=-5\,.$$

5. α΄ τρόπος: Επειδή $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ οπότε

$$\kappa\mu+\lambda\nu=0 \qquad (1)$$

Επειδή τα μέτρα των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα με τη μονάδα έχουμε

$$\kappa^2+\lambda^2=1 \qquad (2)$$

και

$$\mu^2+\nu^2=1\,. \qquad (3)$$

Ισχύει όμως η ταυτότητα:

$$(\kappa^2+\lambda^2)(\mu^2+\nu^2)-(\kappa\mu+\lambda\nu)^2=(\kappa\nu-\lambda\mu)^2\,,$$

η οποία, λόγω των (1), (2) και (3), γίνεται

$$1\cdot 1-0=(\kappa\nu-\lambda\mu)^2 \Leftrightarrow (\kappa\nu-\lambda\mu)^2=1\,.$$

β΄ τρόπος: Έχουμε

$$(\kappa\nu-\lambda\mu)^2=[(\kappa,\lambda)\cdot(\nu,-\mu)]^2=\left(\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}\cdot\sqrt{\nu^2+\mu^2}\cdot\text{συν}\omega\right)^2=1\cdot 1\cdot\text{συν}^2\omega\,,$$

όπου ω είναι η γωνία των διανυσμάτων (κ,λ) και $(\nu,-\mu)$.

Όμως τα διανύσματα (κ,λ) και $(\nu,-\mu)$ είναι παράλληλα, αφού $\begin{vmatrix}\kappa & \lambda\\ \nu & -\mu\end{vmatrix}=-(\kappa\mu+\lambda\nu)=0$. Επομένως, θα είναι $\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ και έτσι θα έχουμε $(\kappa\nu-\lambda\mu)^2=1$.

6. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\alpha,\beta)$ και $\vec{\beta}=(\gamma,\delta)$.

Έχουμε $\quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

και $\quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\alpha\gamma+\beta\delta$.

Επομένως $\quad \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}$ και επειδή $-1\leq\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\leq 1$

έχουμε $\quad -1\leq\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\leq 1$.

7. (i) Έχουμε $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=-\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

(ii) Έχουμε $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{\beta}^2-\vec{\alpha}^2=|\vec{\beta}|^2-|\vec{\alpha}|^2=0$.

Αφού $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, έχουμε $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι "η γωνία η εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή".

8. (i) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HA}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{H\Gamma}-\overrightarrow{HA}=\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{H\Gamma}-\overrightarrow{HB}=\vec{\gamma}-\vec{\beta}$.

(ii) Έχουμε $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{H\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}=0$ που ισχύει, αφού $\Gamma Z\perp AB$.

Επίσης $\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{HB}=0$ που επίσης ισχύει, αφού $BE\perp A\Gamma$.

(iii) Η ισότητα $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ γράφεται διαδοχικά:

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}=0$$

$$(\vec{\gamma}-\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha}=0$$

$$(\overrightarrow{H\Gamma}-\overrightarrow{HB})\cdot\overrightarrow{HA}=0$$

$$\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{HA}=0$$

$$\overrightarrow{B\Gamma}\perp\overrightarrow{HA}.$$

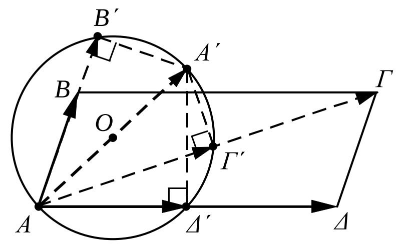
Επομένως $AH \perp B\Gamma$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι: "οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο". (Το σημείο αυτό λέγεται **ορθόκεντρο**).

9. Έχουμε $\overrightarrow{B\Theta} = \overrightarrow{A\Theta} - \overrightarrow{AB} = \vec{\gamma}_2 - \vec{\beta}_1$ και $\overrightarrow{\Gamma Z} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}_2 - \vec{\gamma}_1$. Επομένως

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B\Theta} \cdot \overrightarrow{\Gamma Z} &= (\vec{\gamma}_2 - \vec{\beta}_1) \cdot (\vec{\beta}_2 - \vec{\gamma}_1) = \vec{\gamma}_2 \cdot \vec{\beta}_2 - \vec{\gamma}_2 \cdot \vec{\gamma}_1 - \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2 + \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\gamma}_1 \\ &= \vec{\gamma}_2 \cdot \vec{\beta}_2 + \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\gamma}_1 = |\vec{\gamma}_2||\vec{\beta}_2| \text{συν}\, Z\hat{A}\Theta + |\vec{\beta}_1||\vec{\gamma}_1| \text{συν}\, B\hat{A}\Gamma \\ &= (A\Gamma)(AB)\text{συν}(\pi - A) + (AB)(A\Gamma)\text{συν}A \\ &= -(AB)(A\Gamma)\text{συν}A + (AB)(A\Gamma)\text{συν}A = 0\,.\end{aligned}$$

Άρα $B\Theta \perp \Gamma Z$.

10. Αν φέρουμε τη διάμετρο AA', τότε οι γωνίες B', Γ', Δ' είναι ορθές. Επομένως,



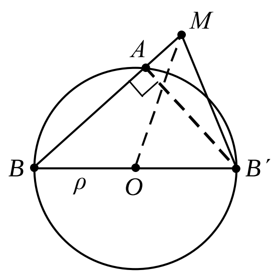
$\overrightarrow{AB'} = \text{Προβ}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{A\Delta'} = \text{Προβ}_{\overrightarrow{A\Delta}} \overrightarrow{AA'}$

και $\overrightarrow{A\Gamma'} = \text{Προβ}_{\overrightarrow{A\Gamma}} \overrightarrow{AA'}$,

οπότε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{A\Delta'} &= \overrightarrow{AB} \cdot \text{Προβ}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A\Delta} \cdot \text{Προβ}_{\overrightarrow{A\Delta}} \overrightarrow{AA'} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{AA'} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}) \cdot \overrightarrow{AA'} \\ &= \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \text{Προβ}_{\overrightarrow{A\Gamma}} \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{A\Gamma'}\,.\end{aligned}$$

11. Αν B' είναι το αντιδιαμετρικό του B, τότε $B\hat{A}B' = 90^0$ και επομένως $\overrightarrow{MA} = \text{Προβ}_{\overrightarrow{MB}} \overrightarrow{MB'}$.



Είναι

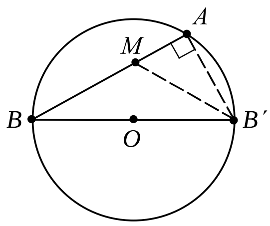
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MB'}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OM})$$

$$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})\cdot(-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$

$$=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB})$$

$$=\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{OB}^2$$

$$=\overrightarrow{OM}^2-\rho^2,$$



που είναι σταθερό.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Για να είναι τα τρία σημεία A, B και Γ συνευθειακά, αρκεί να αποδείξουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι συγγραμμικά.

Από τη σχέση $|\kappa|+|\lambda|+|\mu|\neq 0$ προκύπτει ότι ένας τουλάχιστον από τους κ, λ, μ, για παράδειγμα ο λ, είναι διάφορος του μηδενός.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\kappa\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$$

$$-\kappa\overrightarrow{AO}+\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})+\mu(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AO})=\vec{0}$$

$$\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Gamma}-(\kappa+\lambda+\mu)\overrightarrow{AO}=\vec{0}$$

$$\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}$$

$$\lambda\overrightarrow{AB}=-\mu\overrightarrow{A\Gamma}$$

$$\overrightarrow{AB}=-\frac{\mu}{\lambda}\overrightarrow{A\Gamma}$$

Επομένως τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι συγγραμμικά και άρα τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

Αντιστρόφως.

Αν τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός ρ τέτοιος, ώστε $\overrightarrow{AB}=\rho\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. Επομένως

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\rho(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA})$$

$$\vec{OB} - \vec{OA} - \rho\vec{O\Gamma} + \rho\vec{OA} = \vec{0}$$

$$(\rho - 1)\vec{OA} + 1 \cdot \vec{OB} + (-\rho)\vec{O\Gamma} = \vec{0}\ .$$

Η τελευταία σχέση αν θέσουμε $\rho - 1 = \kappa$, $1 = \lambda$ και $-\rho = \mu$, γράφεται $\kappa \cdot \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{OB} + \mu \cdot \vec{O\Gamma}$ με $\kappa + \lambda + \mu = \rho - 1 + 1 - \rho = 0$ και με έναν τουλάχιστον από τους κ, λ και μ διάφορο του μηδενός, εδώ $\lambda = 1 \neq 0$.

2. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma})$.

Έχουμε
$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{MB} - \vec{MA}\\ &= \vec{AM} - \vec{BM}\\ &= \lambda\vec{AB} + \mu\vec{A\Gamma} - \lambda\vec{A\Gamma} - \mu\vec{BA}\\ &= (\lambda + \mu)\vec{AB} + (\mu - \lambda)\vec{A\Gamma}\ .\end{aligned}$$

Ώστε

$$\vec{AB} = (\lambda + \mu)\vec{AB} + (\mu - \lambda)\vec{A\Gamma} \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad (1 - \lambda - \mu)\vec{AB} = (\mu - \lambda)\vec{A\Gamma}\ .$$

Επειδή όμως τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ δεν είναι συγγραμμικά, η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο όταν $1 - \lambda - \mu = 0$ και $\mu - \lambda = 0$, επομένως $\mu = \lambda = \frac{1}{2}$.

Άρα $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{A\Gamma} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma})$ που σημαίνει ότι το M είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$.

3. Με σημείο αναφοράς το A η δοθείσα σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$\vec{OM} \cdot (\vec{OM} - 2\vec{OA}) = 7$$

$$(\vec{AM} - \vec{AO})(\vec{AM} - \vec{AO} - 2\vec{OA}) = 7$$

$$(\vec{AM} - \vec{AO})(\vec{AM} + \vec{AO}) = 7$$

$$\vec{AM}^2 - \vec{AO}^2 = 7$$

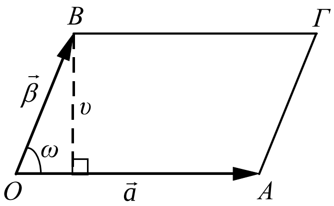
$$|\vec{AM}|^2 - |\vec{AO}|^2 = 7$$

$$|\overrightarrow{AM}|^2-9=7$$

$$|\overrightarrow{AM}|=4.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι το M απέχει από το σταθερό σημείο A σταθερή απόσταση ίση με 4. Άρα το M κινείται σε κύκλο με κέντρο το A και ακτίνα $\rho=4$.

4. α΄ τρόπος: Το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου $OA\Gamma B$ είναι ίσο με $|\vec{\alpha}|\cdot\upsilon$, δηλαδή ίσο με $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\eta\mu\omega$, όπου ω η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι



$$|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\eta\mu\omega\leq|\vec{\beta}|\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|\cdot\eta\mu\omega\leq1.$$

Από τη δοθείσα σχέση έχουμε:

$$|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=1$$

$$|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|^2=1$$

$$(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})^2=1$$

$$\vec{\alpha}^2+2\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}+(\lambda\vec{\beta})^2=1$$

$$|\vec{\beta}|^2\cdot\lambda^2+(2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\lambda+(|\vec{\alpha}|^2-1)=0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι 2ου βαθμού ως προς λ και, σύμφωνα με την εκφώνηση, έχει λύση. Άρα, η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης αυτής είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός. Δηλαδή, έχουμε

$$\Delta\geq0\Leftrightarrow4(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2-4|\vec{\beta}|^2(|\vec{\alpha}|^2-1)\geq0$$

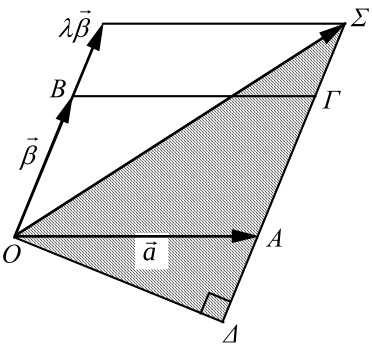
$$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2\,\sigma\upsilon\nu^2\omega-|\vec{\beta}|^2(|\vec{\alpha}|^2-1)\geq0$$

$$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega-|\vec{\alpha}|^2+1\geq0$$

$$\Leftrightarrow-|\vec{\alpha}|^2\,\eta\mu^2\omega+1\geq0$$

$$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|^2\,\eta\mu^2\omega\leq1$$

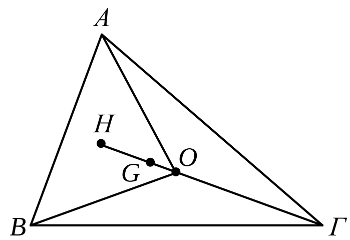
$$\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|\eta\mu\omega\leq1 \qquad (\text{αφού} \quad \eta\mu\omega>0).$$



β΄ τρόπος Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $ΟΑΓΒ$ είναι ίσο με

$$(ΟΑΓΒ)=(ΟΒ)\cdot(ΟΔ)\,. \qquad (1)$$

Όμως, είναι $(ΟΒ)=|\vec{\beta}|$ και $(ΟΔ)\le(ΟΣ)=|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=1$. Επομένως, λόγω της ισότητας (1), έχουμε $(ΟΑΓΒ)\le(ΟΒ)=|\vec{\beta}|$.



5. (i) Για να είναι το H το ορθόκεντρο του τριγώνου αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{ΑΗ}\cdot\overrightarrow{ΒΓ}=0$, $\overrightarrow{ΒΗ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}=0$ και $\overrightarrow{ΓΗ}\cdot\overrightarrow{ΑΒ}=0$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ΑΗ}\cdot\overrightarrow{ΒΓ}&=(\overrightarrow{ΟΗ}-\overrightarrow{ΟΑ})(\overrightarrow{ΟΓ}-\overrightarrow{ΟΒ})\\&=(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\alpha})(\vec{\gamma}-\vec{\beta})\\&=(\vec{\beta}+\vec{\gamma})(\vec{\gamma}-\vec{\beta})\\&=|\vec{\gamma}|^2-|\vec{\beta}|^2\\&=|\overrightarrow{ΟΓ}|^2-|\overrightarrow{ΟΑ}|^2=0\end{aligned}$$

Ομοίως δείχνουμε και ότι $\overrightarrow{ΒΗ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}=0$ και $\overrightarrow{ΓΗ}\cdot\overrightarrow{ΑΒ}=0$.

(ii) Για το βαρύκεντρο G γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GΓ}=\vec{0}$.

Επομένως
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{ΟΑ}-\overrightarrow{ΟG}+\overrightarrow{ΟΒ}-\overrightarrow{ΟG}+\overrightarrow{ΟΓ}-\overrightarrow{ΟG}=\vec{0}\\&3\overrightarrow{ΟG}=\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}\\&\overrightarrow{ΟG}=\frac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})\,.\end{aligned}$$

(iii) Έχουμε $\overrightarrow{ΟΗ}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{ΟG}=\frac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})$.

Επομένως $\overrightarrow{ΟΗ}=3\overrightarrow{ΟG}\Leftrightarrow\overrightarrow{ΟΗ}-\overrightarrow{ΟG}=2\overrightarrow{ΟG}\Leftrightarrow\overrightarrow{GΗ}=2\overrightarrow{ΟG}\Leftrightarrow\overrightarrow{ΟG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GΗ}$ που σημαίνει ότι τα $Ο, G$ και $Η$ είναι συνευθειακά σημεία και ότι το G διαιρεί το τμήμα $ΟΗ$ σε λόγο 1/2.

6. (i) Επειδή $(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$ έχουμε

$$\left((\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}=(\vec{\gamma}+\vec{x})\cdot\vec{\alpha}$$

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}+\vec{x}\cdot\vec{\alpha}$$

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha})-\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$$

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1)=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} \qquad (1)$$

(ii) Επειδή $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1\neq 0$, διαιρούμε τα μέλη της (1) με $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1$ και παίρνουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1}$. Έτσι, από τη δοθείσα σχέση έχουμε $\dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1}\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$, οπότε είναι $\vec{x}=\dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1}\vec{\beta}-\vec{\gamma}$.

7. (i) Έχουμε $\overrightarrow{EK}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{E\Delta})=\dfrac{1}{2}(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

και $\overrightarrow{E\Lambda}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{E\Gamma})=\dfrac{1}{2}(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})$.

Για τη διανυσματική ακτίνα του σημείου M έχουμε:

$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EZ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{E\Delta}+\overrightarrow{\Delta Z})=\frac{1}{2}\left[\vec{\beta}+x(\vec{\beta}-\vec{\alpha})\right], \quad \text{αφού } \overrightarrow{\Delta Z}//\overrightarrow{A\Delta}=(\vec{\beta}-\vec{\alpha})$$

και $\overrightarrow{EM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EZ}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BZ})=\dfrac{1}{2}\left[\kappa\vec{\alpha}+y(\lambda\vec{\beta}-\kappa\vec{\alpha})\right]$, αφού $\overrightarrow{BZ}//\overrightarrow{B\Gamma}=\lambda\vec{\beta}-\kappa\vec{\alpha}$.

Επομένως,
$$\vec{\beta}+x(\vec{\beta}-\vec{\alpha})=\kappa\vec{\alpha}+y(\lambda\vec{\beta}-\kappa\vec{\alpha})$$
$$(1+x-\lambda y)\vec{\beta}=(x+\kappa-\kappa y)\vec{\alpha}.$$

Επειδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, για να αληθεύει η τελευταία ισότητα πρέπει $1+x-\lambda y=0$ και $x+\kappa-\kappa y=0$. Από τη λύση του συστήματος των δύο αυτών εξισώσεων προκύπτει ότι $x=\dfrac{\kappa(\lambda-1)}{\kappa-\lambda}$ και $y=\dfrac{\kappa-1}{\kappa-\lambda}$. Επομένως

$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\left[\kappa\vec{\alpha}+\frac{\kappa-1}{\kappa-\lambda}(\lambda\vec{\beta}-\kappa\vec{\alpha})\right].$$

(ii) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$\overrightarrow{K\Lambda}=\overrightarrow{E\Lambda}-\overrightarrow{EK}=\frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})-\frac{1}{2}(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})$$

ή
$$\overrightarrow{K\Lambda}=\frac{1}{2}\left[(1-\kappa)\vec{\alpha}+(\lambda-1)\vec{\beta}\right]$$

και
$$\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{EM}-\overrightarrow{EK}=\frac{1}{2}\left[\kappa\vec{\alpha}+\frac{\kappa-1}{\kappa-\lambda}(\lambda\vec{\beta}-\kappa\vec{\alpha})-\kappa\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right]$$

ή
$$\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\frac{\kappa}{\kappa-\lambda}\left[(1-\kappa)\vec{\alpha}+(\lambda-1)\vec{\beta}\right].$$

Επομένως $\overrightarrow{KM}=\frac{\kappa}{\kappa-\lambda}\overrightarrow{K\Lambda}$, που σημαίνει ότι τα σημεία *K*, *Λ* και *M* είναι συνευθειακά.

8. Σύμφωνα με την άσκηση 4 της Β΄ ομάδας στη σελίδα 28, αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των κορυφών *Α*, *Β* και *Γ* αντιστοίχως του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και $\vec{\delta}, \vec{\varepsilon}, \vec{\zeta}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των κορυφών *Δ*, *Ε* και *Ζ* αντιστοίχως του $\overset{\Delta}{\Delta EZ}$ ως προς την ίδια αρχή *Ο*, τότε έχουμε:

$$\vec{\delta}=\frac{\nu\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma}}{\mu+\nu}, \quad \vec{\varepsilon}=\frac{\nu\vec{\gamma}+\mu\vec{\alpha}}{\mu+\nu} \quad \text{και} \quad \vec{\zeta}=\frac{\nu\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}}{\mu+\nu}.$$

Το κέντρο βάρους *G* του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ έχει διανυσματική ακτίνα την

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}).$$

Επίσης το κέντρο βάρους G' του τριγώνου $\overset{\Delta}{\Delta EZ}$ έχει διανυσματική ακτίνα

$$\overrightarrow{OG'}=\frac{1}{3}\left(\frac{\nu\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma}}{\mu+\nu}+\frac{\nu\vec{\gamma}+\mu\vec{\alpha}}{\mu+\nu}+\frac{\nu\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}}{\mu+\nu}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(\mu+\nu)(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})}{\mu+\nu}=\frac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}).$$

Επομένως $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OG'}$, που σημαίνει ότι τα *G* και G' συμπίπτουν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας *ΑΒ* είναι:

$$\lambda=\frac{6-4}{1-(-1)}=\frac{2}{2}=1$$

(ii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας *ΓΔ* είναι:

$$\lambda=\frac{2-0}{0-(-1)}=\frac{2}{1}=2$$

(iii) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ κάθε ευθείας κάθετης προς την *ΓΔ* έχει με τον συντελεστή διεύθυνσης της *ΓΔ* γινόμενο ίσο με -1. Αρα θα είναι $\lambda=-\frac{1}{2}$.

2. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η *ΑΒ* με τον άξονα $x'x$.

(i) Η ευθεία *ΑΒ* έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{6-4}{1-(-1)}=\frac{2}{2}=1$. Άρα, θα ισχύει εφ$\omega$=1 οπότε θα είναι $\omega=45^0$.

(ii) Η ευθεία *ΑΒ* έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{4-3}{0-(-1)}=\frac{1}{1}=1$. Άρα και στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $\omega=45^0$.

(iii) Επειδή τα *Α*, *Β* έχουν την ίδια τετμημένη, η ευθεία *ΑΒ* θα είναι κατακόρυφη και κατά συνέπεια θα είναι $\omega=90^0$.

(iv) Επειδή τα *Α*, *Β* έχουν ίδια τετμημένη, η ευθεία *ΑΒ* θα είναι οριζόντια και κατά συνέπεια θα είναι $\omega=0^0$.

3. (i) Το διάνυσμα $\vec{\delta}=(3,-2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{2}{3}$, οπότε η ζητούμενη ευθεία, που είναι παράλληλη με το $\vec{\delta}$ θα έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Επειδή, επιπλέον, διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$, η εξίσωση της θα είναι:

$$y-(-1)=-\frac{2}{3}(x-1) \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}.$$

(ii) Το διάνυσμα $\vec{\delta}(0,1)$ έχει τετμημένη ίση με το μηδέν, άρα έχει διεύθυνση κατακόρυφη. Έτσι η ζητούμενη ευθεία θα είναι και αυτή κατακόρυφη και, επειδή διέρχεται από το $A(1,-1)$, θα έχει εξίσωση $x=1$.

(iii) Αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας, θα έχουμε $\lambda=\text{εφ}\frac{\pi}{4}=1$. Άρα, η εξίσωση της ευθείας θα είναι: $y+1=1(x-1)$ ή, ισοδύναμα, $y=x-2$.

4. (i) Έχουμε $\lambda_{B\Gamma}=\frac{4-2}{-3-3}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$, οπότε το ύψος *ΑΔ*, που είναι κάθετο στην *ΒΓ*, θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{A\Delta}=3$. Επειδή, επιπλέον, το $A(-1,0)$ είναι σημείο του ύψους, η εξίσωση του θα είναι $y-0=3(x-(-1))$, δηλαδή $y=3x+3$. Εργαζόμενοι ομοίως βρίσκουμε ότι η εξίσωση του ύψους *ΒΕ* είναι $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ και η εξίσωση του ύψους *ΓΖ* είναι $y=-2x-2$.

(ii) Προφανώς και η μεσοκάθετη της πλευράς *ΒΓ* θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=3$. Επειδή, όμως, αυτή διέρχεται από το μέσον *Μ* της *ΒΓ*, το οποίο έχει συντεταγμένες: $\left(\frac{3+(-3)}{2},\frac{2+4}{2}\right)=(0,3)$, η εξίσωσή της θα είναι $y-3=3(x-0)$ δηλαδή $y=3x+3$. (Παρατηρείστε ότι ταυτίζεται με την εξίσωση του ύψους *ΑΔ*, τί συμπεραίνετε;)
Εργαζόμενοι ομοίως βρίσκουμε ότι οι εξισώσεις των μεσοκαθέτων των *ΑΓ* και *ΑΒ*, αντιστοίχως, είναι:

$$y=\frac{1}{2}x+3 \quad \text{και} \quad y=-2x+3.$$

5. Είναι $\lambda_{A\Delta}=\frac{1}{2}$ και $\lambda_{B\Gamma}=\frac{1}{2}$, άρα $A\Delta // B\Gamma$. Επίσης είναι $\lambda_{AB}=2$ και $\lambda_{\Gamma\Delta}=2$, άρα $AB // \Gamma\Delta$. Έτσι, αφού το τετράπλευρο *ΑΒΓΔ* έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες θα είναι παραλληλόγραμμο. Ακόμη είναι $\lambda_{A\Gamma}=-1$ και $\lambda_{B\Delta}=1$, οπότε $\lambda_{A\Gamma}\cdot\lambda_{B\Delta}=-1$ και συνεπώς οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι κάθετες. Άρα το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

Η $A\Gamma$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-1$ και διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$. Άρα, θα έχει εξίσωση $y-1=-1(x-3)$, δηλαδή $y=-x+4$.
Ομοίως η $B\Delta$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$ και διέρχεται από το $B(5,5)$. Άρα, θα έχει εξίσωση: $y-5=1(x-5)$, δηλαδή $y=x$.

6. Έχουμε $\lambda_{AB}=\dfrac{0-(-1)}{2-1}=1$ και $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{-3-(-1)}{-1-1}=1$. Επομένως, $\lambda_{AB}=\lambda_{A\Gamma}$, οπότε οι ευθείες AB και $A\Gamma$ είναι παράλληλες και εφόσον έχουν κοινό το σημείο A θα ταυτίζονται. Άρα, τα σημεία A, B, Γ θα είναι συνευθειακά.

7. • Αν $\alpha\neq 0$ και $\theta\neq\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι $\lambda=\dfrac{\alpha(\text{συν}\theta-\text{ημ}\theta)}{-\alpha(\text{συν}\theta+\text{ημ}\theta)}=\dfrac{\text{ημ}\theta-\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta+\text{συν}\theta}$. Επομένως, η εξίσωση της AB είναι

$$y-\alpha\text{ημ}\theta=\frac{\text{ημ}\theta-\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta+\text{συν}\theta}(x-\alpha\text{συν}\theta),$$

η οποία γράφεται διαδοχικά:

$$y=\frac{\text{ημ}\theta-\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta+\text{συν}\theta}x+\alpha\text{ημ}\theta+\alpha\text{συν}\theta\,\frac{\text{συν}\theta-\text{ημ}\theta}{\text{ημ}\theta+\text{συν}\theta}$$

$$y=\frac{\text{ημ}\theta-\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta+\text{συν}\theta}x+\frac{\alpha\,\text{ημ}^2\theta+\alpha\text{ημ}\theta\text{συν}\theta+\alpha\text{συν}^2\theta-\alpha\text{ημ}\theta\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta+\text{συν}\theta}$$

$$y=\frac{\text{ημ}\theta-\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta+\text{συν}\theta}x+\frac{\alpha}{\text{ημ}\theta+\text{συν}\theta}.$$

• Αν $\alpha\neq 0$, αλλά $\theta=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, τότε $\alpha\text{συν}\theta=-\alpha\text{ημ}\theta=\pm\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, οπότε η ευθεία AB είναι κατακόρυφη και άρα έχει εξίσωση

$$x=-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\quad \text{ή}\quad x=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

• Αν $\alpha=0$, τότε τα σημεία A, B ταυτίζονται, οπότε υπάρχουν άπειρες ευθείες που διέρχονται από αυτά.

8. Αν (x,y) είναι οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους *G* του τριγώνου *ΑΒΓ*, τότε θα είναι:

$$x=\frac{2-4+3}{3}=\frac{1}{3} \quad \text{και} \quad y=\frac{3+5-4}{3}=\frac{4}{3}.$$

Επομένως, η ευθεία που διέρχεται από σημεία $A(2,3)$ και $G=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{3-\frac{4}{3}}{2-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=1$ και κατά συνέπεια η εξίσωσή της θα είναι $y-3=1(x-2)$, δηλαδή $y=x+1$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η ζητούμενη ευθεία, επειδή σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο και περνάει από το σημείο $A(-1,2)$, θα έχει εξίσωση $y-2=\lambda(x+1)$, με $\lambda\neq 0$, -2, δηλαδή:

$$y=\lambda x+\lambda+2, \text{ με } \lambda\neq 0,\ -2.$$

Με τους περιορισμούς αυτούς το σημείο τομής της ευθείας με τον $x'x$, έστω *Β*, έχει συντεταγμένες $\left(-\frac{\lambda+2}{\lambda},0\right)$, ενώ το σημείο τομής της με τον άξονα $y'y$, έστω *Γ*, έχει συντεταγμένες $(0,\lambda+2)$. Έτσι, αφού $(OB)=\left|-\frac{\lambda+2}{\lambda}\right|$ και $(O\Gamma)=|\lambda+2|$, το τρίγωνο *ΟΒΓ* είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν:

$$\left|-\frac{\lambda+2}{2}\right|=|\lambda+2|\Leftrightarrow\frac{|\lambda+2|}{|\lambda|}=|\lambda+2|\Leftrightarrow\frac{1}{|\lambda|}=1\Leftrightarrow|\lambda|=1\Leftrightarrow\lambda=1 \quad \text{ή} \quad \lambda=-1,$$

Άρα, υπάρχουν δύο ευθείες που ικανοποιούν το ζητούμενο και των οποίων οι εξισώσεις είναι:

$$y=x+3 \quad \text{και} \quad y=-x+1.$$

2. Αρχικά, διαπιστώνουμε ότι οι συντεταγμένες του *Α* δεν επαληθεύουν τις εξισώσεις που δίνονται. Άρα οι εξισώσεις, αυτές αντιστοιχούν στα ύψη *ΒΕ* και *ΓΖ*. Εστω ότι η $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ είναι η εξίσωση του *ΒΕ* και η $y=-x+2$ του

ΓZ. Τότε, επειδή $A\Gamma \perp BE$ και $AB \perp \Gamma Z$, θα έχουμε: $\lambda_{A\Gamma} \cdot \lambda_{BE} = -1$ και $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{\Gamma Z} = -1$, οπότε $\lambda_{A\Gamma} = -2$ και $\lambda_{A\Gamma} = 1$. Άρα οι εξισώσεις των $A\Gamma$ και AB θα είναι, αντιστοίχως, οι

$$y-4=-2(x-1) \quad \text{και} \quad y-4=1(x-1),$$

δηλαδή οι

$$y=-2x+6 \quad \text{και} \quad y=x+3$$

Επομένως, οι συντεταγμένες του Γ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} A\Gamma : y=-2x+6 \\ \Gamma Z : y=-x+2 \end{cases}, \quad \text{που είναι το ζεύγος} \quad (4,-2)$$

και οι συντεταγμένες του B είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} AB : y=x+3 \\ BE : y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases}, \quad \text{που είναι το ζεύγος} \quad (-3,0)$$

Τέλος, επειδή $\lambda_{B\Gamma} = \frac{-2-0}{4-(-3)} = \frac{-2}{7}$, η εξίσωση της $B\Gamma$ θα είναι $y-0=\frac{-2}{7}(x+3)$, δηλαδή $y=-\frac{2}{7}x-\frac{6}{7}$.

3. Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $M(2,1)$ είναι η κατακόρυφη με εξίσωση $x=2$ και οι μη κατακόρυφες με εξισώσεις $y-1=\lambda(x-2)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

- Η ευθεία $x=2$ τέμνει την $y=x+1$ στο σημείο $B(2,3)$ και την $y=-x+1$ στο σημείο $\Gamma(2,-1)$. Το $B\Gamma$ έχει μέσο το σημείο με συντεταγμένες $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right)$ δηλαδή (2,1), που είναι οι συντεταγμένες του σημείο M.
Άρα, η κατακόρυφη $x=2$ είναι μια από τις ζητούμενες ευθείες.

- Η ευθεία $y-1=\lambda(x-2)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, τέμνει τις $y=x+1$ και $y=-x+1$ στα σημεία B και Γ αντιστοίχως, που οι συντεταγμένες τους είναι οι λύσεις των συστημάτων:

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y-1=\lambda(x-2) \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} y=-x+1 \\ y-1=\lambda(x-2) \end{cases}$$

Από το πρώτο σύστημα, με αντικατάσταση του y στη δεύτερη εξίσωση, έχουμε:

$$x+1-1=\lambda x-2\lambda \Leftrightarrow (\lambda-1)x=2\lambda .$$

Άρα, αν $\lambda\neq 1$, τότε $x=\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}$, οπότε $y=x+1=\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}+1=\dfrac{3\lambda-1}{\lambda-1}$.

Επομένως, οι συντεταγμένες του B θα είναι το ζεύγος $\left(\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}, \dfrac{3\lambda-1}{\lambda-1}\right)$.

Ομοίως, από το δεύτερο σύστημα έχουμε:

$$-x+1-1=\lambda x-2\lambda \Leftrightarrow (\lambda+1)x=2\lambda .$$

Άρα, αν $\lambda\neq -1$, τότε $x=\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}$, οπότε $y=-x+1=-\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}+1=\dfrac{1-\lambda}{\lambda+1}$.

Επομένως, οι συντεταγμένες του Γ θα είναι το ζεύγος $\left(\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}, \dfrac{1-\lambda}{\lambda+1}\right)$. Έτσι το $M(2,1)$ θα είναι μέσο του $B\Gamma$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}+\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}\right)=2 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\lambda-1}{\lambda-1}+\dfrac{1-\lambda}{\lambda+1}\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4\lambda^2}{\lambda^2-1}=4 \\ \dfrac{3\lambda^2+2\lambda-1-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda^2-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2=\lambda^2-1 \\ \text{και} \\ 2\lambda^2+4\lambda-2=2\lambda^2-2 \end{cases} .$$

Οι εξισώσεις όμως αυτές δεν συναληθεύουν για καμία τιμή του λ, αφού η πρώτη είναι αδύνατη για κάθε $\lambda\in\mathbf{R}$. Έτσι η μόνη λύση του προβλήματός μας, είναι η κατακόρυφη ευθεία $x=2$.

4. (i) Η εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία $P\left(\kappa, \dfrac{1}{\kappa}\right)$ και $Q\left(\lambda, \dfrac{1}{\lambda}\right)$, με $\kappa\neq\lambda$ και $\kappa,\lambda\neq 0$, έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $\dfrac{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\kappa}}{\lambda-\kappa}=\dfrac{-1}{\kappa\lambda}$. Άρα η εξίσωσή της είναι $y-\dfrac{1}{\kappa}=-\dfrac{1}{\kappa\lambda}(x-\kappa)$, δηλαδή

$$y=-\frac{1}{\kappa\lambda}x+\frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda} \tag{1}$$

(ii) Από την (1), για $x=0$, έχουμε $y=\frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}$ και, για $y=0$, έχουμε $x=\kappa+\lambda$. Άρα τα σημεία τομής της PQ με τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντιστοίχως, είναι τα:

$$B\left(0, \frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}\right) \quad \text{και} \quad A(\kappa+\lambda, 0).$$

Έτσι θα έχουμε:

$$(AP)=\sqrt{(\kappa-\kappa-\lambda)^2+\left(\frac{1}{\kappa}-0\right)^2}=\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{\kappa^2}}$$

και

$$(BQ)=\sqrt{(\lambda-0)^2+\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{\kappa+\lambda}{\kappa\lambda}\right)^2}=\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{\kappa^2}}.$$

Άρα $AP=BQ$.

5. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{\beta-0}{0-\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$, οπότε η εξίσωσή της θα είναι η:

$$y-0=-\frac{\beta}{\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-\frac{\beta}{\alpha}x+\beta\Leftrightarrow \alpha y+\beta x=\alpha\beta\Leftrightarrow\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

(με τον προφανή περιορισμό ότι $\alpha\cdot\beta\neq 0$).

6. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι η ζητούμενη ευθεία θα έχει εξίσωση της μορφής $y=-\frac{2}{3}x+\beta$, $\beta\neq 0$. Από την εξίσωση αυτή, για $y=0$, έχουμε $x=\frac{3}{2}\beta$ και, για $x=0$, έχουμε $y=\beta$. Άρα, τα σημεία A και B θα έχουν συντεταγμένες τα ζεύγη $\left(\frac{3}{2}\beta, 0\right)$ και $(0, \beta)$ αντιστοίχως, οπότε θα είναι

$$x_A+y_B=15\Leftrightarrow\frac{3}{2}\beta+\beta=15\Leftrightarrow 5\beta=30\Leftrightarrow\beta=6.$$

Άρα, η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι η $y=-\frac{2}{3}x+6$.

2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Επειδή οι συντελεστές $\mu-1$ και μ των x και y δεν μηδενίζονται συγχρόνως για καμία τιμή του μ, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει για κάθε $\mu\in\mathbf{R}$ ευθεία γραμμή. Έστω ε η ευθεία αυτή. Τότε:

$$\varepsilon // x'x \Leftrightarrow \mu-1=0 \Leftrightarrow \mu=1 \quad \text{και} \quad \varepsilon // y'y \Leftrightarrow \mu=0 .$$

Τέλος, η ε διέρχεται από το $O(0,0)$, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του O επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει:

$$(\mu-1)0+\mu\cdot 0+\mu^2=0 \Leftrightarrow \mu^2=0 \Leftrightarrow \mu=0 .$$

2. • Η ευθεία $2x-3y+6=0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{2}{3}$. Άρα η ζητουμένη ευθεία, που είναι κάθετη σ'αυτήν, θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{3}{2}$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο A(-2,3), θα έχει εξίσωση $y-3=-\frac{3}{2}(x+2)$, δηλαδή $y=-\frac{3}{2}x$.

• Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} y=-\frac{3}{2}x \\ 2x-3y+6=0 \end{cases}$, που είναι το ζεύγος $\left(-\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right)$.

3. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} 2x-5y+3=0 \\ x-3y-7=0 \end{cases}$, που είναι το ζεύγος $(-44,-17)$.

Η ευθεία $4x+y=1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης -4. Άρα, η ζητούμενη θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{1}{4}$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο $A(-44,-17)$, θα έχει εξίσωση $y+17=\frac{1}{4}(x+44)$, δηλαδή $y=\frac{1}{4}x-6$.

4. (i) Επειδή $ΑΔ // ΒΓ$, θα είναι $\lambda_{ΑΔ} = \lambda_{ΒΓ} = -\frac{1}{3}$. Άρα η εξίσωση της $ΑΔ$ θα είναι $y-6=-\frac{1}{3}(x+4)$, δηλαδή $y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$. Επομένως, οι συντεταγμένες του $Δ$ θα είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} ΑΔ: y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3} \\ ΓΔ: x-y+2=0 \end{cases}$, που είναι το ζεύγος $(2, 4)$.

(ii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαγωνίου $ΑΓ$ είναι $\lambda=\frac{6-1}{-4+1}=\frac{-5}{3}$, οπότε η $ΑΓ$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα:

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_1 = \mathbf{(3, -5)}.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαγωνίου $ΒΔ$ συμπίπτει με τον συντελεστή διεύθυνσης της $ΔΚ$, όπου $Κ$ το σημείο τομής των διαγωνίων $ΑΓ$ και $ΒΔ$. Το $Κ$ είναι το μέσον της $ΑΓ$, οπότε θα έχει συντεταγμένες το ζεύγος $\left(\frac{-5}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Επομένως, θα ισχύει $\lambda_{ΒΔ} = \lambda_{ΔΚ} = \dfrac{\frac{7}{2}-4}{\frac{-5}{2}-2} = \frac{1}{9}$, οπότε η $ΒΔ$ θα είναι παράλληλη προς το διάνυσμα:

$$\vec{\boldsymbol{\delta}}_2 = \mathbf{(9,1)}.$$

Άρα, η οξεία γωνία των $ΑΓ$ και $ΒΔ$ θα είναι ίση ή παραπληρωματική με τη γωνία φ των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$ για την οποία έχουμε:

$$\text{συν}\varphi = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|} = \frac{3\cdot 9 - 5\cdot 1}{\sqrt{3^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{9^2+1^2}} = \frac{11}{\sqrt{17\cdot 41}} = \frac{11\sqrt{697}}{697} \cong 0{,}416.$$

Έτσι, η οξεία γωνία των $ΑΓ$ και $ΒΔ$ θα είναι περίπου ίση με 65^0.

5. Η ευθεία με εξίσωση $(\lambda-1)x+\lambda y+8=0$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (\lambda, 1-\lambda)$, ενώ η ευθεία με εξίσωση $\lambda x+3y+1-2\lambda=0$ είναι παράλληλη προς το $\vec{\delta}_2 = (3, -\lambda)$. Έτσι, οι δύο ευθείες είναι κάθετες, αν και μόνο αν $\vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_2$. Όμως:

$$\vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow 3\lambda - \lambda(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = -2\,.$$

6. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $3x+4y+6=0$ και $6x+5y-9=0$ είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} 3x+4y+6=0 \\ 6x+5y-9=0 \end{cases}$, που είναι το ζεύγος $\left(\dfrac{22}{3}, -7\right)$.

Έτσι η ευθεία $3x+3y+\kappa=0$ διέρχεται από το σημείο $\left(\dfrac{22}{3}, -7\right)$, αν και μόνο αν $3\dfrac{22}{3} + 3(-7) + \kappa$ ή, ισοδύναμα, $\kappa = -1$.

Άρα, ζητουμένη τιμή του κ είναι η -1.

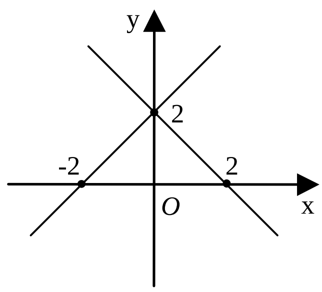
Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Έχουμε

$$x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y+2)(x+y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x + y - 2 = 0\,.$$

Οι τελευταίες είναι εξισώσεις των ευθειών που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα.



(ii) Έχουμε

$$x^2 - y^2 - 4x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2-y+1)(x-2+y-1) = 0\,.$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)(x+y-3) = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 \quad \text{ή} \quad x + y - 3 = 0\,.$$

Οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν ευθείες.

2. Για να παριστάνει η εξίσωση

$$(2\alpha^2+\alpha+3)x+(\alpha^2-\alpha+1)y+(3\alpha+1)=0 \qquad (1)$$

ευθεία γραμμή, για τις διάφορες τιμές του α, πρέπει να αρκεί οι συντελεστές των x και y να μην είναι ταυτόχρονα μηδέν. Αυτό συμβαίνει, αφού ο συντελεστής του y δεν μηδενίζεται για καμία πραγματική τιμή του α. Στη συνέχεια θεωρούμε δύο τιμές του α (έστω $\alpha=0$ και $\alpha=1$) και τις εξισώσεις των ευθειών που προκύπτουν:

$$\begin{cases} 3x+y+1=0 \\ 6x+y+4=0 \end{cases}.$$

Το σύστημα των εξισώσεων αυτών έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(-1,2)$. Άρα οι ευθείες αυτές τέμνονται στο σημείο $A(-1,2)$. Η εξίσωση (1) επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου A, αφού

$$(2\alpha^2+\alpha+3)(-1)+(\alpha^2-\alpha+1)2+3\alpha+1=-2\alpha^2-\alpha-3+2\alpha^2-2\alpha+2+3\alpha+1=0 .$$

Άρα, όλες οι ευθείες της οικογένειας (1) διέρχονται από το σημείο $A\ (-1,2)$.

3. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $x+4y=5$ και $3x-2y=1$ είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} x+4y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$, που είναι το ζεύγος $(x,y)=(1,1)$.

Η τρίτη ευθεία $7x-8y+1=0$ επαληθεύεται για $x=1$, $y=1$ αφού

$$7\cdot 1-8\cdot 1+1=0$$

Άρα, και οι τρεις ευθείες διέρχονται από το σημείο με συντεταγμένες $(1,1)$.

4. Έχουμε τις ευθείες $\mu x-y=0$ και $(1+\mu)x+(\mu-1)y=0$, που είναι αντίστοιχα παράλληλες με τα διανύσματα: $\vec{\delta}_1=(1,\mu)$ και $\vec{\delta}_2=(1-\mu,1+\mu)$. Για την γωνία φ των δύο αυτών διανυσμάτων ισχύει:

$$\text{συν}\varphi=\frac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|}=\frac{1(1-\mu)+\mu(1+\mu)}{\sqrt{1^2+\mu^2}\sqrt{(1-\mu)^2+(1+\mu)^2}}=\frac{1-\mu+\mu+\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{2(1+\mu^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα $\varphi=\frac{\pi}{4}$, οπότε η οξεία γωνία των δύο ευθειών θα είναι ίση με $\frac{\pi}{4}$.

5. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών $\varepsilon_1:\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ και $\varepsilon_2:\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1$ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases}\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1\\ \frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta x+\alpha y=\alpha\beta\\ \alpha x+\beta y=\alpha\beta\end{cases}.$$

Το σύστημα αυτό, αν $\begin{vmatrix}\beta & \alpha\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}=\beta^2-\alpha^2\neq 0$, δηλαδή, αν $\alpha\neq\pm\beta$, έχει τη λύση $(x,y)=\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta},\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)$. Επομένως, αν $\alpha,\beta\neq 0$ και $\alpha\neq\pm\beta$, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y=x$. Αν $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$ οι ε_1 και ε_2 δεν τέμνονται.

Συγκεκριμένα, αν $\alpha=\beta$ οι ευθείες συμπίπτουν, ενώ, αν $\alpha=-\beta$ οι ευθείες είναι παράλληλες.

6. Η ευθεία $3x+y=3$ έχει συντελεστή διεύθυνσης -3. Επομένως, η κάθετη στην ευθεία αυτή από το σημείο $A(1,2)$ θα έχει εξίσωση $y-2=\frac{1}{3}(x-1)$. Άρα, οι συντεταγμένες της προβολής του A στην ευθεία $3x+y=3$, θα είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases}3x+y=3\\ y-2=\frac{1}{3}(x-1)\end{cases}$, που είναι το ζεύγος $\left(\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right)$.

7. Για $y=0$, από την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon:\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$, έχουμε $x=\alpha$. Άρα, το σημείο τομής της ε με τον άξονα $x'x$ είναι το $A(\alpha,0)$.

Η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\dfrac{\beta}{\alpha}$. Άρα, η εξίσωση της κάθετης στην ε στο σημείο $A(\alpha,\ 0)$ θα είναι $y-0=\dfrac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)$, η οποία μετά τις πράξεις, γίνεται $\alpha x-\beta y-\alpha^2=0$.

2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Οι αποστάσεις του $A(-2,3)$ από τις δοθείσες ευθείες, είναι:

(i) $\dfrac{|-2+3+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

(ii) $\dfrac{|2(-2)-3-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

(iii) $\dfrac{\left|\dfrac{-2}{2}+\dfrac{3}{3}-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{13}{36}}}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{13}}{6}}=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

(iv) $\dfrac{|5(-2)+3\cdot 3+1|}{\sqrt{5^2+3^2}}=\dfrac{|-10+10|}{\sqrt{34}}=0$.

2. (i) Έχουμε $\lambda_{\varepsilon_1}=\dfrac{5}{8}$ και $\lambda_{\varepsilon_2}=\dfrac{5}{8}$. Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

(ii) Η απόσταση του $O(0,\ 0)$ από την ε_1 είναι ίση με

$$\frac{|5\cdot 0-8\cdot 0-51|}{\sqrt{5^2+(-8)^2}}=\frac{51\sqrt{89}}{89},$$

ενώ η απόσταση του $O(0,0)$ από την ε_2 είναι ίση με

$$\frac{|5\cdot 0-8\cdot 0+68|}{\sqrt{5^2+(-8)^2}}=\frac{68\sqrt{89}}{89}.$$

(iii) Επειδή το $O(0, 0)$ βρίσκεται μεταξύ των ευθειών ε_1 και ε_2, η απόστασή τους θα είναι ίση με το άθροισμα των αποστάσεων του O απ' αυτές, δηλαδή θα είναι ίση με:.

$$\frac{68\sqrt{89}+51\sqrt{89}}{89}=\frac{119\sqrt{89}}{89}$$

3. (i) Έχουμε $\lambda_{\varepsilon_1}=\frac{4}{3}$ και $\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{4}{3}$. Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

(ii) Για $x=0$, από την εξίσωση ε_1, έχουμε $y=-3$. Άρα το $A(0,-3)$ ανήκει στην ε_1, Η απόσταση των ε_1 και ε_2 θα ισούται με την απόσταση του A από την ε_2, δηλαδή με:

$$\frac{|4\cdot 0-3(-3)-24|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{15}{5}=3.$$

4. Το ζητούμενο σημείο θα είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του AB και της ευθείας $2x-3y=30$. Η εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB είναι $y-6=(-1)(x-4)$ ή, ισοδύναμα, $y=-x+10$. Άρα, οι συντεταγμένες του θα είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} 2x-3y=30 \\ y=-x+10 \end{cases}$, που είναι το ζεύγος $(x, y)=(12, -2)$.

5. Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι της μορφής $y=-3x+\beta$, δηλαδή της μορφής $3x+y-\beta=0$. Επομένως, θα έχουμε:

$$\frac{|3\cdot 0+0-\beta|}{\sqrt{3^2+1^2}}=5 \Leftrightarrow |\beta|=5\sqrt{10} \Leftrightarrow \beta=\pm 5\sqrt{10}.$$

Άρα υπάρχουν δύο ευθείες που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος. Αυτές έχουν εξισώσεις:

$$3x+y-5\sqrt{10}=0 \quad \text{και} \quad 3x+y+5\sqrt{10}=0$$

6. **α΄ τρόπος:** Οι ευθείες ε_1, ε_2, επειδή είναι παράλληλες προς την ε, θα έχουν εξισώσεις της μορφής $3x-2y+\beta=0$.

Αφού, όμως, η ε είναι μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2 και αυτές απέχουν μεταξύ τους 8 μονάδες, η απόσταση οποιουδήποτε σημείου A της ε από κάθε μία θα είναι 4 μονάδες.

Ένα σημείο της ε είναι το $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Επομένως, θα έχουμε

$$\frac{\left|3\cdot 0-2\cdot\frac{1}{2}+\beta\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=4\Leftrightarrow\frac{|\beta-1|}{\sqrt{13}}=4\Leftrightarrow|\beta-1|=4\sqrt{13}\Leftrightarrow\beta=1\pm 4\sqrt{13}\ .$$

Άρα, οι ζητούμενες ευθείες θα είναι οι:

$$\varepsilon_1 : 3x-2y+1+4\sqrt{13}=0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 3x-2y+1-4\sqrt{13}=0 .$$

β΄ τρόπος: Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει σε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2, αν και μόνο αν απέχει από την ε απόσταση ίση με 4, δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\frac{|3x-2y+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=4 \Leftrightarrow |3x-2y+1|=4\sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow 3x-2y+1=-4\sqrt{13} \quad \text{ή} \quad 3x-2y+1=4\sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow 3x-2y+(1+4\sqrt{13})=0 \quad \text{ή} \quad 3x-2y+(1-4\sqrt{13})=0 \qquad (1)$$

Οι εξισώσεις (1) αποτελούν τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2.

7. (i) Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(6,0)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(4,3)$. Άρα

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})| =\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|18|=9 \text{ μονάδες.}$$

(ii) Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(4,-10)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(7,0)$. Άρα

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -10 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|70|=35 \text{ μονάδες.}$$

(iii) Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(2,2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-6,-6)$. Άρα

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -6 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|0|=0 .$$

Άρα, δε σχηματίζεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(-5,-4)$.

8. Αφού το M είναι σημείο του άξονα $x'x$ θα έχει συντεταγμένες της μορφής $(x,0)$, οπότε θα είναι $\overrightarrow{AM}=(x-5,-1)$ και $\overrightarrow{AB}=(-4,2)$.

Επομένως:

$$(MAB)=7 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x-5 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\right|=7 \Leftrightarrow |2x-14|=14$$

$$\Leftrightarrow 2x-14=14 \quad ή \quad 2x-14=-14$$

$$\Leftrightarrow x=14 \qquad ή \quad x=0\,.$$

Άρα, το ζητούμενο σημείο θα είναι το $M(14, 0)$ ή το $M(0, 0)$.

9. Αν $M(x, y)$ είναι το ζητούμενο σημείο, τότε θα έχουμε:

- $$MA=MB \Leftrightarrow \sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}=\sqrt{(5-x)^2+(-2-y)^2}$$

$$\Leftrightarrow 9-6x+x^2+16-8y+y^2=25-10x+x^2+4+y^2+4y$$

$$\Leftrightarrow 4x-12y=4$$

$$\Leftrightarrow x-3y=1$$

και

- $$(MAB)=10 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3-x & 4-y \\ 5-x & -(2+y) \end{vmatrix}\right|=10$$

$$\Leftrightarrow |6x+2y-26|=20$$

$$\Leftrightarrow 6x+2y-26=20 \quad ή \quad 6x+2y-26=-20$$

$$\Leftrightarrow 3x+y=23 \qquad ή \quad 3x+y=3$$

Επομένως:

$$\begin{cases} MA=MB \\ (MAB)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=1 \\ 3x+y=23 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} x-3y=1 \\ 3x+y=3 \end{cases}.$$

Λύνοντας τα συστήματα αυτά βρίσκουμε ότι τα σημεία $M_1(7,2)$ και $M_2(1,0)$ είναι τα ζητούμενα.

10. Αν $A(-3,1)$, $B(-2,3)$, $\Gamma(4,-5)$ οι τρεις κορυφές του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$, τότε θα είναι $\overrightarrow{AB}=(1, 2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(7, -6)$. Άρα

$$(AB\Gamma\Delta)=2\cdot(AB\Gamma)=\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}\right|=|-6-14|=20\,.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή $O(0,0)$ είναι ο κατακόρυφος άξονας $y'y$, δηλαδή η ευθεία $x=0$ και οι μη κατακόρυφες ευθείες $y=\lambda x$. Επειδή, όμως, το $B(0,2)$ είναι σημείο του $y'y$, άξονας αυτός αποκλείεται να ικανοποιεί την απαίτηση του προβλήματος. Από τις $y=\lambda x$, η ζητούμενη είναι εκείνη που ισαπέχει από τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(0,2)$. Επομένως, θα έχουμε:

$$\frac{|\lambda(-2)-1\cdot 0|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=\frac{|\lambda\cdot 0-1\cdot 2|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}\Leftrightarrow|-2\lambda|=|-2|\Leftrightarrow|\lambda|=1\Leftrightarrow\lambda=\pm 1.$$

Άρα, οι ευθείες $y=x$ και $y=-x$ είναι αυτές που ισαπέχουν από τα σημεία A και B.

2. Αν $M(\alpha,0)$ είναι το σημείο του $x'x$ που ισαπέχει από την αρχή $O(0, 0)$ και από την ευθεία $5x+12y-60=0$ τότε θα έχουμε:

$$|\alpha|=\frac{|5\alpha+12\cdot 0-60|}{\sqrt{5^2+12^2}}\Leftrightarrow|\alpha|=\frac{|5\alpha-60|}{13}\Leftrightarrow 13|\alpha|=|5\alpha-60|$$

$$\Leftrightarrow 5\alpha-60=13\alpha \quad \text{ή} \quad 5\alpha-60=-13\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{-15}{2} \qquad \text{ή} \quad \alpha=\frac{10}{3}.$$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία του $x'x$, τα $M_1\left(\frac{-15}{2},0\right)$ και $M_2\left(\frac{10}{3},0\right)$ που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος.

3. Η ζητούμενη ευθεία αποκλείεται να είναι κατακόρυφη ή οριζόντια (αφού τέμνει και τους δύο άξονες). Αφού λοιπόν, διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$, θα έχει εξίσωση

$$y-2=\lambda(x-1),\ \lambda\in\mathbf{R}^*. \qquad (1)$$

Από την (1), για $y=0$, έχουμε $x=\frac{\lambda-2}{\lambda}$ και, για $x=0$, έχουμε $y=2-\lambda$. Άρα, η (1) τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(\frac{\lambda-2}{\lambda},\ 0\right)$ και $B(0,2-\lambda)$, οπότε είναι:

$$(AOB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\left|\frac{\lambda-2}{\lambda}\right|\cdot|2-\lambda|=\frac{(\lambda-2)^2}{|2\lambda|}.$$

Άρα:

$$(AOB)=4\Leftrightarrow\frac{(\lambda-2)^2}{|2\lambda|}=4\Leftrightarrow(\lambda-2)^2=8|\lambda|.$$

Για τη λύση της εξίσωσης αυτής διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>0$, τότε

$$(\lambda-2)^2=8\lambda\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda+4-8\lambda=0\Leftrightarrow\lambda^2-12\lambda+4=0\Leftrightarrow\lambda=6\pm4\sqrt{2}$$

- Αν $\lambda<0$, τότε

$$(\lambda-2)^2=-8\lambda\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda+4+8\lambda=0\Leftrightarrow\lambda^2+4\lambda+4=0\Leftrightarrow\lambda=-2.$$

Επομένως, οι ευθείες με εξισώσεις

$$y-2=(6+4\sqrt{2})(x-1),\quad y-2=(6-4\sqrt{2})(x-1)\quad \text{και}\quad y-2=-2(x-1)$$

είναι οι ζητούμενες.

4. Επειδή οι απόσταση του σημείου $A(-1,3)$ από τον άξονα $y'y$ ισούται με $|-1|=1$, μία από τις ζητούμενες ευθείες είναι ο άξονας $y'y$, δηλαδή η ευθεία με εξίσωση $x=0$.
Αν τώρα είναι $y=\lambda x$ η εξίσωση της μη κατακόρυφης που διέρχεται από το $O(0,0)$ και η οποία απέχει από το σημείο $A(-1,3)$ απόσταση ίση με 1 τότε θα έχουμε:

$$\frac{|\lambda(-1)-3|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=1\Leftrightarrow|\lambda+3|=\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow\lambda^2+6\lambda+9=\lambda^2+1\Leftrightarrow\lambda=-\frac{4}{3}.$$

Άρα, η ζητούμενη μη κατακόρυφη ευθεία είναι η $y=-\frac{4}{3}x$.

5. Η εξίσωση $x-y+2=0$ γράφεται ισοδύναμα $y=x+2$. Άρα, αν ένα σημείο M ανήκει σε αυτήν, οι συντεταγμένες του θα είναι της μορφής $(x,x+2)$. Έτσι, αν η απόσταση του M από την ευθεία $12x-5y+60=0$ ισούται με 1, θα έχουμε:

$$\frac{|12x-5(x+2)+60|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=1 \Leftrightarrow \frac{|7x+50|}{13}=1$$

$$\Leftrightarrow 7x+50=13 \quad \text{ή} \quad 7x+50=-13$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-37}{7} \qquad \text{ή} \quad x=-9\,.$$

Άρα, τα σημεία $M_1\left(\frac{-37}{7}, \frac{-23}{7}\right)$ και $M_2(-9,-7)$ απέχουν από την ευθεία $x-y+2=0$ απόσταση ίση με 1.

6. Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(\gamma-\alpha, \delta-\beta)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-\gamma,-\delta)$. Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι συγγραμμικά. Όμως:

$$\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \gamma-\alpha & \delta-\beta \\ -\gamma & -\delta \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\delta-\gamma\delta+\gamma\delta-\beta\gamma=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\delta-\beta\gamma=0\,.$$

7. **α΄ τρόπος:** Είναι $\lambda_{AB}=-\frac{\beta}{\alpha}$. Άρα, η μεσοκάθετος του AB θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{\alpha}{\beta}$ και, αφού διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$, θα έχει εξίσωση:

$$y-\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha}{\beta}\left(x-\frac{\alpha}{2}\right), \quad \text{δηλαδή} \quad y=\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}\,.$$

Από την εξίσωση αυτή, για $y=0$, έχουμε $x=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}$ ενώ, για $x=0$, έχουμε $y=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}$. Άρα, η μεσοκάθετος του AB τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $P(p,0)$, με $p=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}$, και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $Q(0,q)$ με

$q=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}$. Έτσι έχουμε ήδη εκφράσει τα p, q συναρτήσει των α και β, οπότε έχουμε:

(i)
$$\alpha q+\beta p=\frac{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}{2\beta}+\frac{\beta(\alpha^2-\beta^2)}{2\alpha}$$
$$=\frac{\alpha^2(\beta^2-\alpha^2)+\beta^2(\alpha^2-\beta^2)}{2\alpha\beta}$$
$$=\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2-\alpha^2)}{2\alpha\beta}=2pq\,.$$

(ii)
$$\alpha p+\beta q=\frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{2\alpha}+\frac{\beta(\beta^2-\alpha^2)}{2\beta}=\frac{\alpha^2-\beta^2+\beta^2-\alpha^2}{2}=0$$

β΄ τρόπος: Τα διανύσματα $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και τα σημεία M, P, Q συνευθειακά. Άρα, $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ και $\det(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})=0$ οπότε …

8. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει σε μια από τις διχοτόμους των γωνιών που ορίζουν οι ευθείες $3x-4y+1=0$ και $5x+12y+4=0$, αν και μόνο αν ισαπέχει από τις δύο ευθείες, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$\frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|5x+12y+4|}{\sqrt{5^2+12^2}}\Leftrightarrow\frac{|3x-4y+1|}{5}=\frac{|5x+12y+4|}{13}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}13(3x-4y+1)=5(5x+12y+4)\\ \text{ή}\\ 13(3x-4y+1)=-5(5x+12y+4)\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}39x-52y+13)=25x+60y+20\\ \text{ή}\\ 39x-52y+13=-25x-60y-20\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 2x-16y-1=0 \quad \text{ή} \quad 64x+8y+33=0\,.$$

Άρα, οι εξισώσεις των διχοτόμων είναι οι: $2x-16y-1=0$ και $64x+8y+33=0$.

9. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $x-y+1=0$ και $2x-3y+5=0$ είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-3y+5=0 \end{cases}$, που είναι το ζεύγος $(x,y)=(2,3)$.

Άρα, το κοινό σημείο των ευθειών αυτών είναι το $M(2,3)$. Η απόσταση της κατακόρυφης $x=2$ από το $A(3,2)$ είναι ίση με 1. Άρα η ευθεία αυτή δεν ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος. Οι μη κατακόρυφες που διέρχονται από το $M(2,3)$ έχουν εξίσωση $y-3=\lambda(x-2)$, $\lambda\in\mathbf{R}$, η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$\lambda x-y+(3-2\lambda)=0\,,\ \lambda\in\mathbf{R}\,.$$

Από αυτές η ζητούμενη είναι εκείνη που απέχει από το $A(3,2)$ απόσταση ίση με $\frac{7}{5}$. Άρα, έχουμε:

$$\frac{|3\lambda-2+3-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=\frac{7}{5}\Leftrightarrow\frac{|\lambda+1|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{7}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2+1}=\frac{49}{25}\qquad\Leftrightarrow 25\lambda^2+50\lambda+25=49\lambda^2+49$$

$$\Leftrightarrow 12\lambda^2-25\lambda+12=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{3}{4}\ \text{ ή }\ \lambda=\frac{4}{3}\,.$$

Άρα, οι ζητούμενες ευθείες είναι οι: $\frac{3}{4}x-y+\frac{3}{2}=0$ και $\frac{4}{3}x-y+\frac{1}{3}=0$.

10. Ένα σημείο $M(x,y)$ είναι σημείο του ζητούμενου συνόλου, αν και μόνο αν ισχύει $(MAB)=8$. Όμως:

$$(MAB)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1-x & -2-y\\ 3-x & 1-y\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-3x+4y+5|$$

Επομένως:

$$(MAB)=8\Leftrightarrow|-3x+4y+5|=16$$

$$\Leftrightarrow -3x+4y+5=16\quad\text{ή}\quad -3x+4y+5=-16$$

$$\Leftrightarrow -3x+4y-11=0\quad\text{ή}\quad -3x+4y+21=0\,.$$

Άρα, το ζητούμενο σύνολο αποτελείται από τις ευθείες $-3x+4y-11=0$ και $-3x+4y+21=0$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Θεωρούμε την κατακόρυφη που διέρχεται από το $M(1,0)$, δηλαδή την $x=1$, ή οποία τέμνει την $y=x+2$ στο σημείο $A(1,3)$ και την $y=x$ στο $B(1,1)$. Έχουμε $(AB)=3-1=2$. Άρα η $x=1$ είναι μία λύση του προβλήματός μας.

Έστω, τώρα, μία μη κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(1,0)$. Η ευθεία αυτή θα έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda(x-1)$, $\lambda\in\mathbf{R}$, δηλαδή της μορφής $y=\lambda x-\lambda$, $\lambda\in\mathbf{R}$. Η λύση του συστήματος $\begin{cases} y=\lambda x-\lambda \\ y=x+2 \end{cases}$ δίνει τις συντεταγμένες του *A*, ενώ η λύση του συστήματος $\begin{cases} y=\lambda x-\lambda \\ y=x \end{cases}$ δίνει τις συντεταγμένες του *B*. Για να έχουν λύση τα συστήματα αυτά αρκεί $\lambda\neq 1$. Λύνοντας τα παραπάνω συστήματα βρίσκουμε ότι οι συντεταγμένες των *A* και *B* είναι αντιστοίχως $\left(\frac{\lambda+2}{\lambda-1},\frac{3\lambda}{\lambda-1}\right)$ και $\left(\frac{\lambda}{\lambda-1},\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)$. Έτσι, θα είναι:

$$(AB)=2\Leftrightarrow (AB)^2=4$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}-\frac{\lambda+2}{\lambda-1}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}-\frac{3\lambda}{\lambda-1}\right)^2=4\Leftrightarrow\frac{(-2)^2+(-2\lambda)^2}{(\lambda-1)^2}=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{4(\lambda^2+1)}{(\lambda-1)^2}=4\Leftrightarrow\lambda^2+1=\lambda^2-2\lambda+1\Leftrightarrow\lambda=0$$

Άρα, η δεύτερη ευθεία που ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας έχει εξίσωση $y=0$.

2. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} \lambda x+(\lambda-1)y=2\lambda \\ (\lambda+1)x+\lambda y=2\lambda+1 \end{cases}$, του οποίου η ορίζουσα είναι

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda^2+1=1\neq 0 \text{ για κάθε } \lambda\in\mathbf{R}.$$

Άρα, το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda\in\mathbf{R}$, επομένως οι ευθείες πάντα τέμνονται. Για την εύρεση της λύσης του συστήματος έχουμε:

$$D_x=\begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda-1 \\ 2\lambda+1 & \lambda \end{vmatrix}=2\lambda^2-2\lambda^2-\lambda+2\lambda+1=\lambda+1$$

και

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda & 2\lambda\\ \lambda+1 & 2\lambda+1\end{vmatrix}=2\lambda^2+\lambda-2\lambda^2-2\lambda=-\lambda\,.$$

Άρα

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{\lambda+1}{1},\frac{-\lambda}{1}\right)=(\lambda+1,-\lambda)\,.$$

Έτσι, για τις συντεταγμένες του κοινού σημείου των ευθειών έχουμε:

$$\begin{cases}x=\lambda+1\\ y=-\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\lambda+1\\ \lambda=-y\end{cases},\ \lambda\in\mathbf{R}\Leftrightarrow x=-y+1\Leftrightarrow y=-x+1$$

Η ευθεία $y=-x+1$ είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

3. Αν $K(x_0,y_0)$ το κοινό σημείο των τριών ευθειών, και M_1,M_2,M_3 τα σημεία με συντεταγμένες (α_1,β_1), (α_2,β_2) και (α_3,β_3), τότε θα είναι $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ και, επιπλέον, θα ισχύει:

$$\begin{cases}\alpha_1x_0+\beta_1y_0=1\\ \alpha_2x_0+\beta_2y_0=1\\ \alpha_3x_0+\beta_3y_0=1\end{cases},\quad \text{οπότε θα έχουμε}\quad \begin{cases}\alpha_1x_0+\beta_1y_0=1\\ (\alpha_2-\alpha_1)x_0+(\beta_2-\beta_1)y_0=0\\ (\alpha_3-\alpha_1)x_0+(\beta_3-\beta_1)y_0=0\end{cases}.$$

Επομένως, το ζεύγος (x_0, y_0) είναι μία λύση του συστήματος

$$\begin{cases}(\alpha_2-\alpha_1)x+(\beta_2-\beta_1)y=0\\ (\alpha_3-\alpha_1)x+(\beta_3-\beta_1)y=0\end{cases}.$$

Επειδή $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, το σύστημα έχει δύο, τουλάχιστον, λύσεις την $(0,0)$ και την (x_0,y_0). Άρα, η ορίζουσά του θα είναι ίση με μηδέν, δηλαδή θα ισχύει:

$$\begin{vmatrix}\alpha_2-\alpha_1 & \beta_2-\beta_1\\ \alpha_3-\alpha_1 & \beta_3-\beta_1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{M_1M_2}/\!/\overrightarrow{M_1M_3}\Leftrightarrow M_1,M_2,M_3 \text{ συνευθειακά.}$$

4. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1\\[2mm] \dfrac{x}{\beta}+\dfrac{y}{\alpha}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta x+\alpha y=\alpha\beta\\ \alpha x+\beta y=\alpha\beta\end{cases}$$

το οποίο, αν $\beta \neq \alpha, -\alpha$, έχει μοναδική λύση την $(x,y)=\left(\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)$.

Επομένως, σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το $M\left(\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)$, οπότε η η ευθεία MA θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\beta}{\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\alpha} = \dfrac{-\beta^2}{-\alpha^2} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ και άρα εξίσωση $y-\beta = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}(x-\alpha)$, δηλαδή $\beta^2 x - \alpha^2 y + \alpha\beta(\alpha-\beta) = 0$.

5. Αρκεί να βρούμε την απόσταση ενός σημείου της ευθείας $\varepsilon_1 : \dfrac{x}{A}+\dfrac{y}{B}=1$ από την ευθεία $\varepsilon_2 : \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1$. Η ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $M(0,B)$ του οποίου η απόσταση από την ε_2 είναι

$$d = \frac{\left|\dfrac{B}{\beta}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}}} = \frac{|\alpha B - \alpha\beta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Όμως οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες. Άρα, θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, δηλαδή θα ισχύει $\dfrac{-\beta}{\alpha} = \dfrac{-B}{A}$ ή, ισοδύναμα, $A\beta = \alpha B$, οπότε θα είναι:

$$d = \frac{|A\beta-\alpha\beta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{|\beta(A-\alpha)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\beta(A-\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

(αφού $\beta > 0$ και $A-\alpha > 0$).

6. (i) Έχουμε

$$\begin{aligned} x^2-4xy+y^2=0 &\Leftrightarrow x^2-4xy+4y^2-3y^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2y)^2-(\sqrt{3}y)^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2y-\sqrt{3}y)(x-2y+\sqrt{3}y)=0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x-(2+\sqrt{3})y=0 \quad \text{ή} \quad x-(2-\sqrt{3})y=0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2+\sqrt{3}}x \qquad \text{ή} \quad y=\frac{1}{2-\sqrt{3}}x$$

$$\Leftrightarrow y=(2-\sqrt{3})x \qquad \text{ή} \quad y=(2+\sqrt{3})x\,.$$

Άρα, η $x^2-4xy+y^2=0$ παριστάνει τις ευθείες $y=(2-\sqrt{3})x$ και $y=(2+\sqrt{3})x$.

(ii) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\delta}_1=(1,\,2-\sqrt{3})$, $\vec{\delta}_2=(1,\,2+\sqrt{3})$ που είναι παράλληλα στις δύο προηγούμενες ευθείες καθώς και το $\vec{\delta}=(1,1)$ που είναι παράλληλο στην $y=x$. Αν φ_1 είναι η γωνία των $\vec{\delta},\vec{\delta}_1$ και φ_2 η γωνία των $\vec{\delta},\,\vec{\delta}_2$, θα είναι:

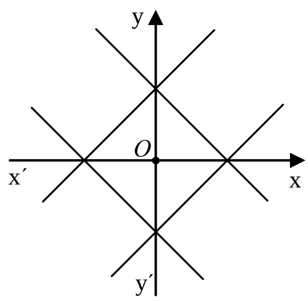
$$\text{συν}\varphi_1=\frac{\vec{\delta}\cdot\vec{\delta}_1}{|\vec{\delta}|\,|\vec{\delta}_1|}=\frac{1+2-\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+1^2}\,\sqrt{1^2+(2-\sqrt{3})^2}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

άρα $\varphi_1=30^0$. Ομοίως δείχνουμε ότι $\text{συν}\varphi_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$, δηλαδή $\varphi_2=30^0$ και το ζητούμενο έχει αποδειχτεί.

7. (i) Για να ορίζει η ευθεία $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ με τους άξονες τρίγωνο, αρκεί να είναι $\alpha,\ \beta,\ \gamma\neq 0$. Η ευθεία αυτή τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(-\frac{\gamma}{\alpha},\,0\right)$ και $B\left(0,\,-\frac{\gamma}{\beta}\right)$.

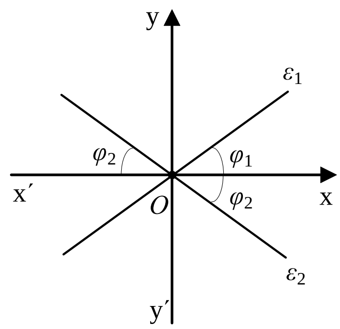
Επομένως, το AOB είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν επιπλέον ισχύει

$$(OA)=(OB)\Leftrightarrow\left|-\frac{\gamma}{\alpha}\right|=\left|-\frac{\gamma}{\beta}\right|\Leftrightarrow\frac{|\gamma|}{|\alpha|}=\frac{|\gamma|}{|\beta|}\Leftrightarrow|\alpha|=|\beta|\,.$$



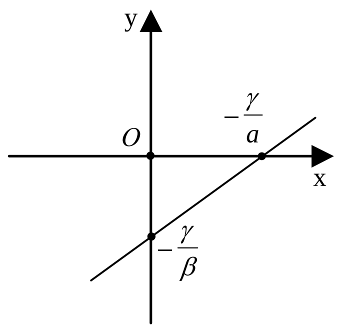
Άρα, η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, αν και μόνο αν $|\alpha|=|\beta|\neq 0$ και $\gamma\neq 0$.

(ii) • Αν $\beta_1=\beta_2=0$, τότε οι ευθείες συμπίπτουν με τον άξονα $y'y$, οπότε αποκλείεται ο άξονας $x'x$ να διχοτομεί τη γωνία τους.



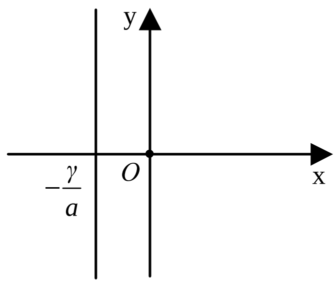
- Αν ένας μόνο από τους β_1, β_2 είναι μηδέν, τότε πάλι αποκλείεται ο άξονας $x'x$ να διχοτομεί τη γωνία τους.
- Αν $\beta_1, \beta_2 \neq 0$, τότε οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ και $\lambda_2 = -\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$ αντιστοίχως και, επειδή διέρχονται από την αρχή των αξόνων, για να διχοτομεί ο $x'x$ τη γωνία τους πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \Leftrightarrow -\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Leftrightarrow \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 = 0$$



8. (i) Αφού η ευθεία $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ τέμνει και τους δύο ημιάξονες (όχι στο O) θα είναι $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Έτσι, για $y=0$, έχουμε $x = -\dfrac{\gamma}{\alpha}$. Άρα, το σημείο τομής της ευθείας με τον $x'x$ είναι το $A\left(-\dfrac{\gamma}{\alpha}, 0\right)$ και ανήκει στον θετικό ημιάξονα Ox, αν και μόνο αν $-\dfrac{\gamma}{\alpha} > 0$, δηλαδή $\alpha\gamma < 0$.

Ομοίως, για $x=0$, το σημείο τομής της ευθείας και του άξονα $y'y$ είναι το $B\left(0, -\dfrac{\gamma}{\beta}\right)$ και ανήκει στον αρνητικό ημιάξονα Oy', αν και μόνο αν $-\dfrac{\gamma}{\beta} < 0$, δηλαδή $\beta\gamma > 0$.

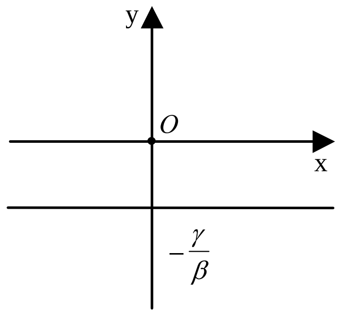


(ii) • Αν $\beta = 0$, τότε η ευθεία έχει εξίσωση $x = -\dfrac{\gamma}{\alpha}$ (κατακόρυφη), οπότε για να μην έχει σημεία στο 1ο τεταρτημόριο πρέπει και αρκεί $-\dfrac{\gamma}{\alpha} \leq 0$, δηλαδή

$$\boldsymbol{\gamma\alpha \geq 0, \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0 \quad \text{και} \quad \beta = 0}$$

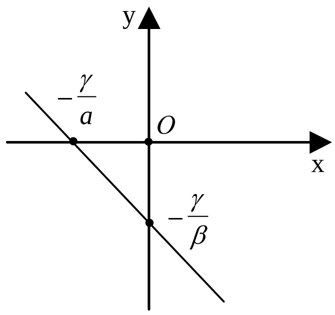
- Αν $\alpha=0$, τότε η ευθεία έχει εξίσωση $y=-\dfrac{\gamma}{\beta}$ (οριζόντια), οπότε για να μην έχει σημεία στο 1ο τεταρτημόριο πρέπει και αρκεί $-\dfrac{\gamma}{\alpha}\leq 0$, δηλαδή

$$\boldsymbol{\beta\gamma\geq 0}\ \textbf{, με}\ \boldsymbol{\beta\neq 0}\ \textbf{και}\ \boldsymbol{\alpha=0}.$$



- Αν $\alpha,\beta\neq 0$ τότε η ευθεία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A\left(-\dfrac{\gamma}{\alpha},0\right)$ και $B\left(0,-\dfrac{\gamma}{\beta}\right)$ αντιστοίχως, οπότε για να μην έχει σημεία στο 1ο τεταρτημόριο, πρέπει και αρκεί $-\dfrac{\gamma}{\alpha}\leq 0$ και $-\dfrac{\gamma}{\beta}\leq 0$, δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha\gamma\geq 0}\ \textbf{και}\ \boldsymbol{\beta\gamma\geq 0}\ \textbf{με}\ \boldsymbol{\alpha,\beta\neq 0}.$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με $\rho=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ και επομένως η εξίσωσή του είναι: $x^2+y^2=2^2$

(ii) Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με $\rho=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)^2}=\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)}$ και επομένως η εξίσωσή του είναι: $x^2+y^2=2(\alpha^2+\beta^2)$.

(iii) Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με την απόσταση του κέντρου $O(0,0)$ του κύκλου από την ευθεία $x-y-2=0$. Επομένως $\rho=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$ και άρα η εξίσωσή του είναι: $x^2+y^2=2$.

(iv) Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με την απόσταση του κέντρου $O(0,0)$ του κύκλου από την ευθεία $\alpha x+\beta y-(\alpha^2+\beta^2)=0$. Επομένως, $\rho=\dfrac{|\alpha^2+\beta^2|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=$ $=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ και άρα η εξίσωση του κύκλου είναι: $x^2+y^2=\alpha^2+\beta^2$.

2. (i) Αν $A(x_1,y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A θα έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=5$ και επειδή είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+3$ θα ισχύει $-\dfrac{x_1}{y_1}=2$. Άρα $x_1=-2y_1$. Επειδή το σημείο $A(x_1,y_1)$ είναι σημείο του κύκλου θα ισχύει $x_1^2+y_1^2=5$. Επομένως, το σημείο $A(x_1,y_1)$ προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος

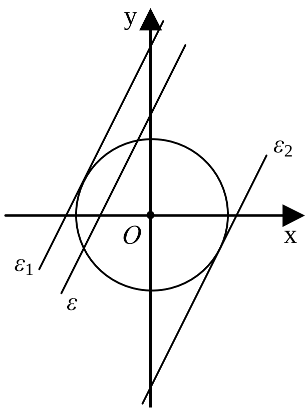
$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 & (1) \\ x_1^2 + y_1^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

Η (2) λόγω της (1) γίνεται

$$(-2y_1)^2 + y_1^2 = 5 \Leftrightarrow y_1 = 1 \quad \text{ή} \quad y_1 = -1,$$

οπότε υπάρχουν δύο σημεία επαφής, τα $A(-2,1)$ και $B(2,-1)$ και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες είναι οι

$$-2x + y = 5 \quad \text{και} \quad 2x - y = 5.$$



(ii) Αν $A(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη του κύκλου στο A θα έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = 5$ και, επειδή είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$, θα είναι $-\frac{x_1}{y_1} = -2$. Άρα $x_1 = 2y_1$. Επειδή το σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι σημείο του κύκλου, θα ισχύει $x_1^2 + y_1^2 = 5$. Επομένως το σημείο A προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 & (1) \\ x_1^2 + y_1^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

Η (2) λόγω της (1) γίνεται

$$4x_1^2 + y_1^2 = 5 \Leftrightarrow y_1 = 1 \quad \text{ή} \quad y_1 = -1,$$

οπότε υπάρχουν δύο σημεία επαφής, τα $A(2,1)$ και $B(-2,-1)$ και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες είναι οι

$$2x + y = 5 \quad \text{και} \quad -2x - y = 5.$$

(iii) Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη του κύκλου θα έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = 5$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$ θα είναι $5x_1 + 0y_1 = 5$. Επομένως $x_1 = 1$. Επειδή το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι σημείο του κύκλου θα ισχύει $x_1^2 + y_1^2 = 5$. Επομένως το σημείο M_1 προσδιορίζεται από την λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x_1 = 1 & (1) \\ x_1^2 + y_1^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

Η (2) λόγω της (1) γίνεται

$$1+y_1^2=5 \Leftrightarrow y_1=2 \quad \text{ή} \quad y_1=-2\,,$$

οπότε υπάρχουν δύο σημεία επαφής, τα $M_1(1,2)$ και $M_2(1,-2)$ και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες είναι οι

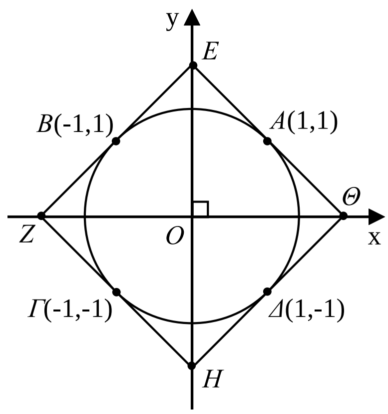
$$x+2y=5 \quad \text{και} \quad x-2y=5\,.$$

3. Οι εφαπτόμενες του κύκλου $x^2+y^2=2$ στα σημεία *Α*, *Β*, *Γ* και *Δ* είναι αντιστοίχως:

$$\varepsilon_1: x+y=2\,, \qquad \varepsilon_2: -x+y=2$$

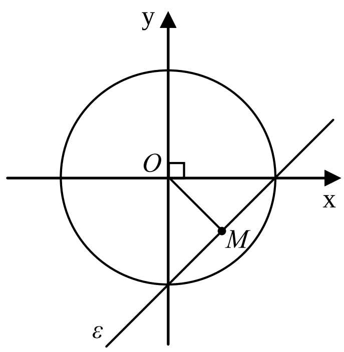
$$\varepsilon_3: -x-y=2 \qquad \varepsilon_4: x-y=2\,.$$

Τα σημεία τομής των εφαπτομένων είναι $E(0,2)$, $Z(-2,0)$, $H(0,-2)$ και $\Theta(2,0)$. Επειδή οι διαγώνιες *ΕΗ* και *ΖΘ* είναι ίσες και διχοτομούνται κάθετα το τετράπλευρο *ΕΖΗΘ* είναι τετράγωνο.



4. Για να έχει η χορδή μέσον το *Μ*, πρέπει να είναι κάθετη στην *ΟΜ* στο *Μ*. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας *ΟΜ* είναι $\lambda=\frac{-1}{1}=-1$ και επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης της χορδής θα είναι ίσος με 1. Άρα, η εξίσωση της χορδής είναι

$y+1=1(x-1)$ ή, ισοδύναμα, $y=x-2$.



5. (i) Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ και επομένως η εξίσωση του είναι $x^2+(y-1)^2=2^2$.

(ii) Το κέντρο *Κ* του κύκλου είναι το μέσον του *ΑΒ* και επομένως έχει τετμημένη $\frac{-1+7}{2}=3$ και τεταγμένη $\frac{2+8}{2}=5$, δηλαδή το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(3,5)$. Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με

$\rho = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(7+1)^2+(8-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5$. Άρα, η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-3)^2+(y-5)^2=5^2$.

(iii) Το κέντρο $K(x_0, y_0)$ του κύκλου ισαπέχει από τα A και B και μάλιστα ισχύει $KA = KB = 5$. Επομένως

$$(x_0-1)^2+(y_0-0)^2=25 \qquad (1)$$

και

$$(x_0-7)^2+(y_0-0)^2=25 \qquad (2)$$

οπότε

$$(x_0-1)^2+y_0^2=(x_0-7)^2+y_0^2 \Leftrightarrow x_0=4.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του x_0 στην (1) και έχουμε

$$3^2+y_0^2=25 \Leftrightarrow y_0=4 \text{ ή } y_0=-4.$$

Επομένως $(x_0, y_0)=(4,4)$ ή $(x_0, y_0)=(4,-4)$. Άρα, υπάρχουν δύο κύκλοι και έχουν εξισώσεις

$$(x-4)^2+(y-4)^2=5^2 \text{ και } (x-4)^2+(y+4)^2=5^2.$$

(iv) Αν $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του κύκλου, τότε ισχύουν:

$$y_0=x_0 \quad \text{και} \quad (x_0-4)^2+(y_0-0)^2=(x_0-8)^2+(y_0-0)^2.$$

Έτσι έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x_0=y_0 \\ (x_0-4)^2=(x_0-8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=6 \\ y_0=6 \end{cases}.$$

Επομένως, ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K(6,6)$ και ακτίνα $\rho = KA = \sqrt{(6-4)^2+(6-0)^2} = \sqrt{2^2+6^2} = 2\sqrt{10}$.

Άρα, η εξίσωση του κύκλου είναι : $(x-6)^2+(y-6)^2=40$.

(v) Το κέντρο K του κύκλου θα έχει τετμημένη $\frac{8+4}{2}=6$ και τεταγμένη $\frac{\mu-2}{2}$, δηλαδή ο κύκλος θα έχει για κέντρο το σημείο $K\left(6,\frac{\mu-2}{2}\right)$. Είναι όμως

$$KA=K\Gamma \Leftrightarrow (6-4)^2+\left(\frac{\mu-2}{2}\right)^2=(6-0)^2+\left(\frac{\mu-2}{2}+2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4+\left(\frac{\mu-2}{2}\right)^2=36+\left(\frac{\mu-2}{2}\right)^2+4+2(\mu-2)$$

$$\Leftrightarrow \mu=-16\,.$$

Επομένως, ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K(6,-9)$ και ακτίνα $\rho=KA=\sqrt{(6-4)^2+(-9)^2}=\sqrt{4+81}=\sqrt{85}$. Άρα, η εξίσωσή του κύκλου είναι $(x-6)^2+(y+9)^2=85$.

(vi) Το κέντρο $K(x_0,y_0)$ του κύκλου είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του τμήματος AB και της καθέτου στον άξονα $x'x$ στο σημείο A.

Το μέσον του AB είναι το σημείο M με συντεταγμένες $\left(\frac{3+1}{2},\frac{0+2}{2}\right)=(2,1)$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι ο $\frac{2-0}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1$. Επομένως, η μεσοκάθετος του AB έχει εξίσωση $y-1=1(x-2)$, δηλαδή , $y=x-1$.

Η κάθετος στον $x'x$ στο A έχει εξίσωση $x=3$. Επομένως, το κέντρο K προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=x-1 \\ x=3 \end{cases},\ \text{η οποία είναι}\ \ (x,y)=(3,2)\,.$$

Επομένως, ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho=KA=\sqrt{(3-3)^2+2^2}=2$. Άρα η εξίσωση του είναι

$$(x-3)^2+(y-2)^2=2^2\,.$$

(vii) Το κέντρο $K(x_0, y_0)$ του κύκλου θα είναι η τομή της μεσοκαθέτου του τμήματος *ΟΑ* και της καθέτου στην *ε* στο σημείο της $A(0,3)$.

Η μεσοκάθετος του *ΟΑ* έχει εξίσωση $y=\frac{3}{2}$ και η κάθετος στην *ε* στο *Α* έχει εξίσωση $y-3=\frac{4}{3}(x-0)$ ή, ισοδύναμα, $y=\frac{4}{3}x+3$. Επομένως, το κέντρο *Κ* προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2} \\ y=\frac{4}{3}x+3 \end{cases}, \quad \text{η οποία είναι η} \quad (x,y)=\left(-\frac{9}{8},\frac{3}{2}\right).$$

Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με $\rho=OK=\sqrt{\left(-\frac{9}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{15}{8}$. Άρα, η εξίσωση του κύκλου είναι

$$\left(x+\frac{9}{8}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{15}{8}\right)^2.$$

6. (i) Έχουμε διαδοχικά:

$$x^2+y^2+4x-6y-3=0$$

$$(x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2)+(y^2-2\cdot 3\cdot y+3^2)=3+2^2+3^2$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=4^2.$$

Άρα, ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K(-2,3)$ και ακτίνα $\rho=4$.

(ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$x^2+y^2-10x+12y-20=0$$

$$(x^2-2\cdot 5\cdot x+5^2)+(y^2+2\cdot 6\cdot y+6^2)=20+5^2+6^2$$

$$(x-5)^2+(y+6)^2=9^2$$

Άρα, ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K(5,-6)$ και ακτίνα $\rho=9$.

(iii) Έχουμε διαδοχικά:

$$3x^2+3y^2+6x-9y+1=0$$

$$x^2+y^2+2x-3y+\frac{1}{3}=0$$

$$(x^2+2\cdot1\cdot x+1^2)+\left(y^2-2\cdot\frac{3}{2}y+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)=1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{3}$$

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{35}{12}}\right)^2.$$

Άρα, ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{\frac{35}{12}}$.

(iv) Έχουμε διαδοχικά:

$$x^2+y^2-4\alpha x+10\beta y+4\alpha^2+16\beta^2=0$$

$$[x^2-2\cdot2\alpha\cdot x+(2\alpha)^2]+[y^2+2\cdot5\beta\cdot y+(5\beta)^2]=(5\beta)^2-16\beta^2$$

$$(x-2\alpha)^2+(y+5\beta)^2=(3\beta)^2\ .$$

Άρα, ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K(2\alpha,-5\beta)$ και ακτίνα $\rho=3|\beta|$.

7. (i) Έχουμε διαδοχικά:

$$x^2+y^2-2x+4y+4=0$$

$$(x^2-2\cdot1\cdot x+1^2)+(y^2+2\cdot2\cdot x+2^2)=1^2$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=1^2.$$

Επομένως, ο κύκλος έχει κέντρο $K(1,-2)$ και ακτίνα $\rho=1$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του $A(1,-1)$ είναι η ευθεία η κάθετη στην KA στο A. Όμως η KA είναι κατακόρυφη ευθεία. Άρα, η κάθετη στην KA στο A είναι η ευθεία $y=-1$, που είναι και η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του $A(1,-1)$.

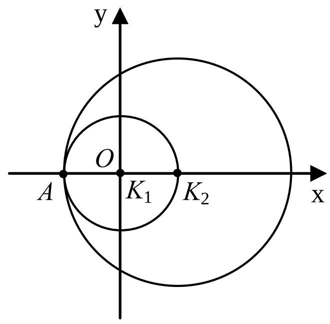
(ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2-3\beta^2=0$$

$$(x^2-2\alpha x+\alpha^2)+(y^2+2\beta y+\beta^2)=\beta^2+3\beta^2$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(2\beta)^2.$$

Επομένως, ο κύκλος έχει κέντρο $K(\alpha,\beta)$ και ακτίνα $\rho=2|\beta|$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του $A(\alpha,-\beta)$ είναι η κάθετη στην KA στο A. Όμως η KA είναι κατακόρυφη ευθεία, άρα η κάθετη στην KA στο A είναι η ευθεία $y=-\beta$.



8. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K_1(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1=1$, ενώ το κύκλος C_2 έχει κέντρο $K_2(1,0)$ και ακτίνα $\rho_2=2$. Επειδή $K_1K_2=\rho_2-\rho_1=1$, ο κύκλος C_1 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_2 στο σημείο $A(-1,0)$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η εξίσωση $(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\gamma)(y-\delta)=0$ επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ και Δ. Επίσης η εξίσωση γράφεται $x^2+y^2-(\alpha+\beta)x-(\gamma+\delta)y+(\alpha\beta+\gamma\delta)=0$, δηλαδή είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$. Άρα, είναι η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου στο τετράπλευρο *ΑΒΓΔ*.

Επίσης

$$\vec{AB}\cdot\vec{B\Gamma}=(\beta-\alpha,0)(0,\delta-\gamma)=(\beta-\alpha)\cdot 0+0(\delta-\gamma)=0$$

Επομένως $A\hat{B}\Gamma=90^0$, που σημαίνει ότι η *ΑΓ* είναι διάμετρος του κύκλου. Ομοίως βρίσκουμε ότι και η *ΒΔ* είναι διάμετρος του κύκλου.

2. Ο κύκλος γράφεται $(x+2)^2+(y-4)^2=4^2$, επομένως έχει κέντρο το σημείο $K(-2,4)$ και ακτίνα $\rho=4$. Η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία $\text{συν}\varphi\cdot x+\text{ημ}\varphi\cdot y-4\text{ημ}\varphi+2\text{συν}\varphi-4=0$ είναι ίση με

$$d=\frac{|-2\text{συν}\varphi+4\text{ημ}\varphi-4\text{ημ}\varphi+2\text{συν}\varphi-4|}{\sqrt{\text{ημ}^2\varphi+\text{συν}^2\varphi}}=|-4|=4=\rho\,.$$

Άρα, η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο.

3. Έστω $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ τα σημεία επαφής. Η εφαπτομένη του κύκλου στο M_1 έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$. Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το $M_0(x_0,y_0)$, οι συντεταγμένες του M_0 επαληθεύουν την $xx_1+yy_1=\rho^2$ Επομένως $x_1x_0+y_1y_0=\rho^2$, που σημαίνει ότι η εξίσωση

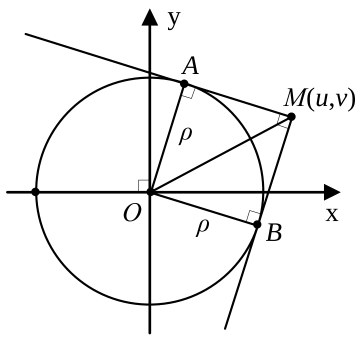
$xx_0 + yy_0 = \rho^2$ επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου M_1. Ομοίως διαπιστώνουμε ότι επαληθεύεται και από τις συντεταγμένες του M_2. Όμως η εξίσωση $xx_0 + yy_0 = \rho^2$ είναι εξίσωση 1ου βαθμού και επειδή επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των M_1 και M_2, είναι η εξίσωση της ευθείας M_1M_2.

4. Ο κύκλος C έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = (3\alpha)^2$. Έστω $M(x,y)$ ένα σημείο του κύκλου και $G(u,v)$ το κέντρο βάρους του τριγώνου OAM. Για τις συντεταγμένες του G έχουμε $u = \frac{0+3\alpha+x}{3} = \frac{3\alpha+x}{3}$ και $v = \frac{0+0+y}{3} = \frac{y}{3}$ και επομένως $x = 3u - 3\alpha$ και $y = 3v$. Όμως το $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο. Επομένως $x^2 + y^2 = 9\alpha^2$ και με αντικατάσταση των x και y έχουμε:

$$(3u-3\alpha)^2 + (3v)^2 = 9\alpha^2$$
$$9(u-\alpha)^2 + 9v^2 = 9\alpha^2$$
$$(u-\alpha)^2 + v^2 = \alpha^2,$$

που σημαίνει ότι το G ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(\alpha,0)$ και ακτίνα $\rho = |\alpha|$, δηλαδή στον κύκλο $(x-\alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$.

5. Ένα σημείο $M(x,y)$ είναι σημείο του τόπου, αν και μόνο αν οι εφαπτόμενες MA και MB προς τον κύκλο $x^2 + y^2 = \rho^2$ είναι κάθετες. Αυτό συμβαίνει, αν και μόνο αν το τετράπλευρο $OAMB$ είναι τετράγωνο ή, ισοδύναμα,



$$OM^2 = \rho^2 + \rho^2$$
$$x^2 + y^2 = \rho^2 + \rho^2$$
$$x^2 + y^2 = (\rho(\sqrt{2})^2,$$

που σημαίνει ότι ο γεωμετρικός τόπος του M είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = (\rho\sqrt{2})^2$.

6. Το σημείο $M(x,y)$ είναι σημείο του τόπου, αν και μόνο αν $\frac{MA}{MB} = 2$ ή, ισοδύναμα,

$$MA=2MB$$
$$MA^2=4MB^2$$
$$(x+3)^2+y^2=4[(x-3)^2+y^2]$$
$$x^2+6x+9+y^2=4x^2-24x+36+4y^2$$
$$3x^2+3y^2-30x=-27$$
$$x^2+y^2-10x=-9$$
$$(x^2-2\cdot 5\cdot x+5^2)+y^2=-9+5^2$$
$$(x-5)^2+y^2=4^2.$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(5,0)$ και ακτίνα $\rho=4$.

7. Έστω ε η ευθεία με εξίσωση $x=1$. Το σημείο $M(x,y)$ είναι σημείο το τόπου, αν και μόνο αν $d(M,O)=4d(M,\varepsilon)$. Όμως

$$d(M,O)=4d(M,\varepsilon)\Leftrightarrow x^2+y^2=4|x-1|$$

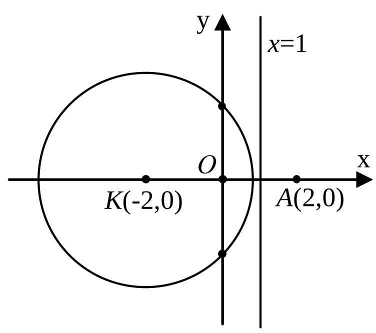
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=4(x-1),\ \text{αν}\ x\geq 1 \qquad (1)\\ \qquad\text{ή} \\ x^2+y^2=-4(x-1),\ \text{αν}\ x\leq 1 \qquad (2)\end{array}\right.$$

Αλλά

- $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+y^2=-4\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+y^2=0\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}$

- $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x+y^2=4\\ x\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)^2+y^2=(2\sqrt{2})^2\\ x\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=8.$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος αποτελείται από το σημείο $A(2,0)$ και τον κύκλο $(x+2)^2+y^2=8$.



8. Ένα σημείο $M(x,y)$ είναι σημείο του τόπου, αν και μόνο αν ισχύει $MA^2+MB^2+M\Gamma^2=107$, ή ισοδύναμα:

$$(x-3)^2+(y-5)^2+(x-2)^2+(y+4)^2+(x+5)^2+(y+1)^2=107$$

$$3x^2+3y^2=27$$

$$x^2+y^2=3^2$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=3$. Το κέντρο του κύκλου αυτού είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου $AB\Gamma$, αφού $\frac{3+2-5}{3}=0$ και $\frac{5-4-1}{3}=0$.

9. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} \text{συν}\theta\cdot x+\text{ημ}\theta\cdot y=\alpha \\ \text{ημ}\theta\cdot x-\text{συν}\theta\cdot y=\beta \end{cases}.$$

Έχουμε $$D=\begin{vmatrix} \text{συν}\theta & \text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & -\text{συν}\theta \end{vmatrix}=-\text{συν}^2\theta-\text{ημ}^2\theta=-1$$

$$D_x=\begin{vmatrix} \alpha & \text{ημ}\theta \\ \beta & -\text{συν}\theta \end{vmatrix}=-\alpha\text{συν}\theta-\beta\text{ημ}\theta$$

$$D_y=\begin{vmatrix} \text{συν}\theta & \alpha \\ \text{ημ}\theta & \beta \end{vmatrix}=\beta\text{συν}\theta-\alpha\text{ημ}\theta.$$

Επομένως $$x=\frac{D_x}{D}=\alpha\text{συν}\theta+\beta\text{ημ}\theta$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\alpha\text{ημ}\theta-\beta\text{συν}\theta,$$

οπότε έχουμε

$$x^2+y^2=(\alpha\text{συν}\theta+\beta\text{ημ}\theta)^2+(\alpha\text{ημ}\theta-\beta\text{συν}\theta)^2$$

$$=\alpha^2\text{συν}^2\theta+\beta^2\text{ημ}^2\theta+2\alpha\beta\text{ημ}\theta\text{συν}\theta+\alpha^2\text{ημ}^2\theta+\beta^2\text{συν}^2\theta-2\alpha\beta\text{ημ}\theta\text{συν}\theta$$

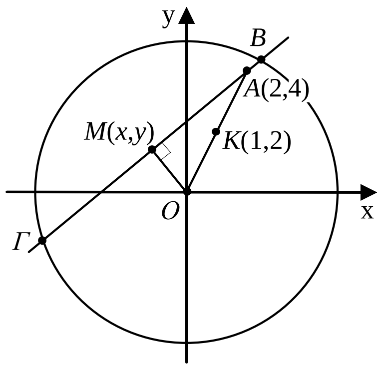
$$=\alpha^2(\text{ημ}^2\theta+\text{συν}^2\theta)+\beta^2(\text{ημ}^2\theta+\text{συν}^2\theta)$$

$=\alpha^2+\beta^2$.

Άρα, το σημείο τομής των ευθειών ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^2$, που έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

10. Ένα σημείο $M(x,y)$ είναι σημείο του τόπου, αν και μόνο αν είναι μέσο χορδής που διέρχεται από το $A(2,4)$. Αυτό συμβαίνει, αν και μόνο $O\hat{M}A=90^0$, δηλαδή, αν και μόνο αν το σημείο M ανήκει στον κύκλο με διάμετρο OA.

Το κέντρο του κύκλου αυτού είναι το σημείο $K\left(\frac{0+2}{2},\frac{0+4}{2}\right)$, δηλαδή το $K(1,2)$, και η ακτίνα του είναι ίση με $\rho=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.



3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Είναι $\frac{p}{2}=-1$, επομένως $p=-2$ και η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2=-4x$.

(ii) Έχουμε $-\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$, επομένως $p=-1$ και η εξίσωση της παραβολής είναι η $y^2=-2x$.

(iii) Η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2=2px$. Επειδή διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, θα ισχύει $2^2=2p\cdot 1$ οπότε $p=2$ Επομένως, η εξίσωση της παραβολής είναι η $y^2=4x$.

2. (i) Είναι $y^2=2\cdot 4\cdot x$. Άρα, η εστία είναι το σημείο $E(2,0)$ και η διευθετούσα
η ευθεία $\delta: x=-2$

(ii) Είναι $y^2=2(-4)x$. Άρα, η εστία είναι το σημείο $E(-2,0)$ και η διευθετούσα η ευθεία $\delta: x=2$

(iii) Είναι $x^2=4y=2\cdot 2y$. Άρα, η εστία είναι το σημείο $E(0,1)$ και η διευθετούσα η ευθεία $\delta: y=-1$

(iv) Είναι $x^2=-4y=2(-2)y$. Άρα, η εστία είναι το σημείο $E(0,-1)$ και η διευθετούσα η ευθεία $\delta: y=1$

(v) Είναι $y^2=2\cdot 2\alpha\cdot x$. Άρα, η εστία είναι το σημείο $E(\alpha,0)$ και η διευθετούσα η ευθεία $\delta: x=-\alpha$

(vi) Είναι $x^2=2\cdot 2\alpha\cdot y$. Άρα, η εστία είναι το σημείο $E(0,\alpha)$ και η διευθετούσα η ευθεία $\delta: y=-\alpha$

3. Η απόσταση της κορυφής από την εστία είναι ίση με $\left|\frac{p}{2}\right|$ και η απόσταση ενός σημείου $M(x,y)$ της παραβολής από την εστία της είναι ίση με $\left|x+\frac{p}{2}\right|$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\left|x+\frac{p}{2}\right|\geq\left|\frac{p}{2}\right|$. Έχουμε

$$\left|x+\frac{p}{2}\right|\geq\left|\frac{p}{2}\right|\Leftrightarrow\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\geq\frac{p^2}{4}\Leftrightarrow x^2+px+\frac{p^2}{4}\geq\frac{p^2}{4}\Leftrightarrow x^2+px\geq 0\Leftrightarrow x^2+\frac{y^2}{2}\geq 0\ ,$$

που ισχύει.

4. Έστω $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία της παραβολής με την ίδια τεταγμένη. Έχουμε $y_1=\frac{1}{4}x_1^2$ και $y_2=\frac{1}{4}x_2^2$ και $y_1=y_2$. Επομένως $\frac{1}{4}x_1^2=\frac{1}{4}x_2^2$, οπότε $x_2=-x_1$. Έτσι, τα σημεία είναι τα $A(x_1,y_1)$ και $B(-x_1,y_1)$ και επομένως έχουμε:

$$\widehat{AOB}=90^0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow (x_1,y_1)(-x_1,y_1)=0 \Leftrightarrow -x_1^2+y_1^2=0$$

$$\Leftrightarrow -4y_1+y_1^2=0 \Leftrightarrow y_1(y_1-4)=0 \Leftrightarrow y_1=4$$

Από τη σχέση $y_1=\frac{1}{4}x_1^2$, για $y_1=4$, έχουμε $4=\frac{1}{4}x_1^2 \Leftrightarrow x_1=4$ ή $x_1=-4$.

Άρα, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(4,4)$ και $B(-4,4)$.

5. Η εξίσωση της παραβολής γράφεται $x^2=2\cdot2\cdot y$ και επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης *ε* στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ είναι

$$xx_1=2(y+y_1), \quad \text{οπότε } y=\frac{x_1}{2}\cdot x-y_1.$$

(i) Επειδή η *ε* είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+1$, έχουμε $\frac{x_1}{2}=1$, οπότε $x_1=2$. Όμως $x_1^2=4y_1$. Επομένως $y_1=1$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=x-1$.

(ii) Επειδή η *ε* είναι κάθετη στην ευθεία $y=-2x$, έχουμε $\frac{x_1}{2}(-2)=-1$, οπότε $x_1=1$. Όμως $x_1^2=4y_1$. Επομένως $y_1=\frac{1}{4}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

(iii) Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$, έχουμε $-1=-y_1$, οπότε $y_1=1$. Όμως $x_1^2=4y_1$. Επομένως $x_1^2=4$, οπότε $x_1=2$ ή $x_1=-2$. Άρα υπάρχουν δύο σημεία επαφής, τα $M_1(2,1)$ και $M_2(-2,1)$, και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες έχουν εξισώσεις $y=x-1$ και $y=-x-1$ αντιστοίχως.

6. Η εξίσωση της παραβολής γράφεται $x^2=2\cdot2\cdot y$ και επομένως οι εφαπτόμενες στα σημεία της $A(4,4)$ και $B\left(-1,\frac{1}{4}\right)$ έχουν εξισώσεις $4x=2(y+4)$ και $-x=2\left(y+\frac{1}{4}\right)$ αντιστοίχως. Οι εξισώσεις αυτές γράφονται $y=2x-4$ και

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ αντιστοίχως και, επειδή $2\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$, οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Τα κοινά σημεία του κύκλου και της παραβολής βρίσκονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{cases}(x-3)^2+y^2=8\\ y^2=4x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+4x=8\\ y^2=4x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y^2=4x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}.$$

Επομένως, υπάρχουν δύο κοινά σημεία, το $A(1,2)$ και το $B(1,-2)$.

- Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο A είναι $y\cdot 2=2(x+1)$ ή, ισοδύναμα,

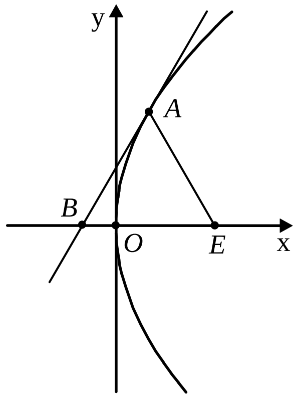
$$x-y+1=0.$$

Η ευθεία αυτή εφάπτεται και του κύκλου, αφού η απόσταση του κέντρου $K(3,0)$ του κύκλου από αυτή είναι ίση με την ακτίνα του $\rho=\sqrt{8}$. Πράγματι

$$d=\frac{|3-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\sqrt{8}$$

- Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας και του κύκλου και της παραβολής και το $B(1,-2)$ είναι συμμετρικό του $A(1,2)$ ως προς τον $x'x$, ο κύκλος και η παραβολή έχουν κοινή εφαπτομένη και στο B. Η εξίσωση της εφαπτομένης αυτής είναι η $x+y+1=0$.

2. Η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2=2\cdot 6\cdot x$ και επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $A(1,2\sqrt{3})$ είναι $2\sqrt{3}y=6(x+1)$ ή, ισοδύναμα, $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$. Η εφαπτομένη αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B(-1,0). Η εστία της παραβολής $y^2=2\cdot 6\cdot x$ είναι το σημείο E(3,0). Επομένως, έχουμε:



$$(AE)^2=2^2+(2\sqrt{3})^2=16,$$

$$(AB)^2=2^2+(2\sqrt{3})^2=16,$$

και $$(BE)^2=4^2+0^2=16,$$

Άρα, $(AE)=(AB)=(BE)=4$, οπότε το τρίγωνο EAB είναι ισόπλευρο.

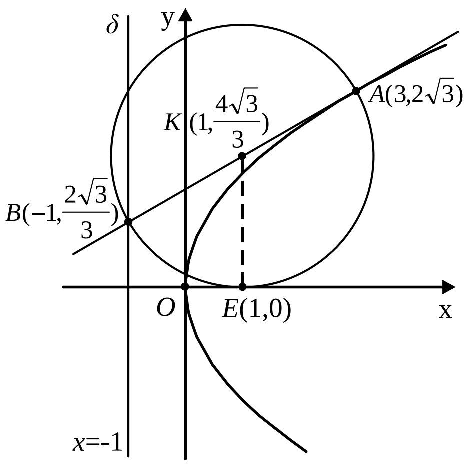
3. Η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2=2\cdot 2\cdot x$ και επομένως εστία της είναι το σημείο E(1,0) και διευθετούσα της η ευθεία $x=-1$.

Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $A(3,2\sqrt{3})$ έχει εξίσωση

$2\sqrt{3}y=2(x+3)$ ή, ισοδύναμα,

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}\,.$$

Η εφαπτομένη τέμνει την διευθετούσα στο σημείο $B\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Το κέντρο του κύκλου με διάμετρο AB είναι το σημείο $K\left(1,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, ενώ η ακτίνα του είναι



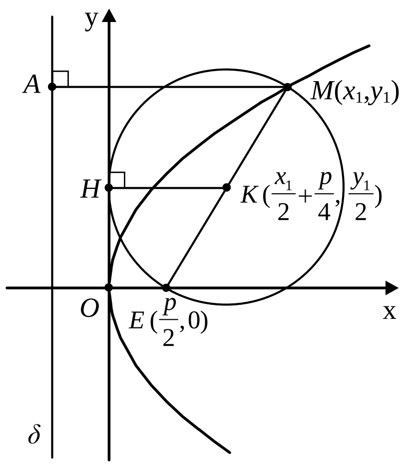
$$\rho=\sqrt{2^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{4}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\,.$$

Επειδή $p=2$, η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(1,0)$. Επομένως

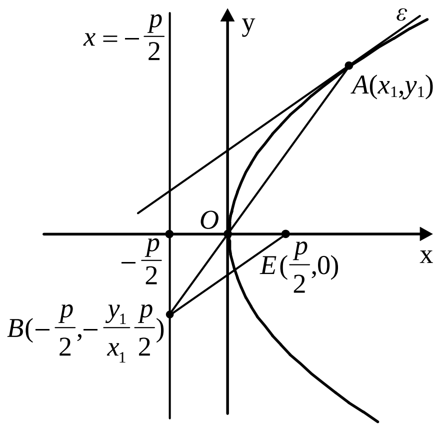
$$KE=\frac{4\sqrt{3}}{3}=\rho \qquad \text{και} \qquad KE\perp x'x$$

Άρα ο κύκλος αυτός εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο E.

4. Η απόσταση ME είναι ίση με την απόσταση MA του M από την διευθετούσα, δηλαδή $ME=\left|x_1+\frac{p}{2}\right|$. Άρα η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με $\rho=\frac{1}{2}\left|x_1+\frac{p}{2}\right|$. Το μέσον K της ME έχει συντεταγμένες $\left(\frac{x_1}{2}+\frac{p}{4},\frac{y_1}{2}\right)$ και η απόσταση του από τον άξονα $y'y$ είναι ίση με $KH=\left|\frac{x_1}{2}+\frac{p}{4}\right|=\frac{1}{2}\left|x_1+\frac{p}{2}\right|=\rho$, που σημαίνει ότι ο κύκλος με διάμετρο ME εφάπτεται στον άξονα $y'y$.



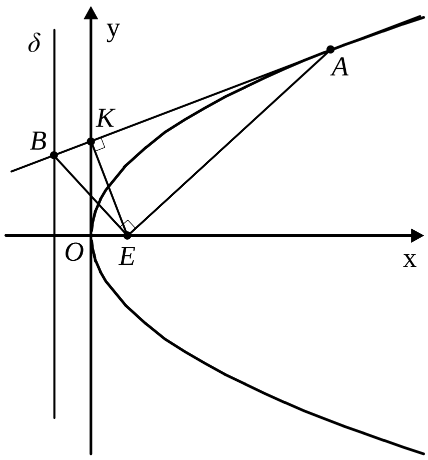
5. Η εξίσωση της ευθείας AO είναι $y=\frac{y_1}{x_1}x$ και τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο $B\left(-\frac{p}{2},-\frac{y_1}{x_1}\frac{p}{2}\right)$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο A έχει εξίσωση $yy_1=p(x+x_1)$ και επομένως, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{p}{y_1}$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της BE είναι



$$\lambda_{BE}=\frac{-\frac{y_1}{x_1}\frac{p}{2}}{-p}=\frac{y_1}{2x_1}=\frac{y_1}{2\frac{y_1^2}{2p}}=\frac{y_1p}{y_1^2}=\frac{p}{y_1}=\lambda$$

Άρα $BE // \varepsilon$.

6. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $yy_1=p(x+x_1)$ και,επειδή $A\neq O$, τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $K\left(0,\frac{px_1}{y_1}\right)$ και τη διευθετούσα δ στο σημείο $B\left(-\frac{p}{2},\ \frac{px_1}{y_1}-\frac{p^2}{2y_1}\right)$.



(i) Για να είναι $A\hat{E}B=90^0$, αρκεί $\vec{EA}\cdot\vec{EB}=0$.

Έχουμε $\vec{EA}\cdot\vec{EB}=0\Leftrightarrow\left(x_1-\frac{p}{2},\ y_1\right)\left(-p,\ \frac{px_1}{y_1}-\frac{p^2}{2y_1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow -px_1+\frac{p^2}{2}+px_1-\frac{p^2}{2}=0\,, \qquad \text{που ισχύει.}$$

(ii) Έχουμε $\qquad \overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{KA}=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{p}{2},\ \frac{px_1}{y_1}\right)\left(x_1,\ y_1-\frac{px_1}{y_1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow -\frac{px_1}{2}+px_1-\frac{p^2x_1^2}{y_1^2}=0$$

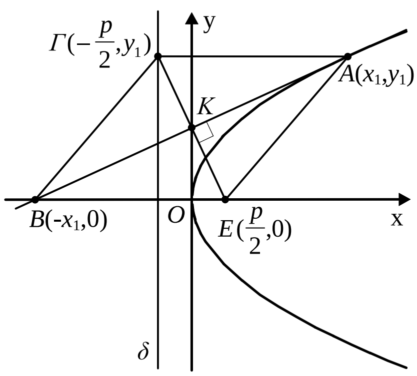
$$\Leftrightarrow \frac{px_1}{2}-\frac{p^2x_1^2}{2px_1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{px_1}{2}-\frac{px_1}{2}=0\,, \qquad \text{που ισχύει.}$$

Άρα $EK\perp AB$.

(iii) Από το ορθογώνιο τρίγωνο *EBA*, επειδή $EK\perp AB$, έχουμε $(EK)^2=(KB)\cdot(KA)$.

7. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $yy_1=p(x+x_1)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-x_1,0)$, ενώ η παράλληλη από το *A* προς τον $x'x$ τέμνει τη διευθετούσα δ στο σημείο $\Gamma\left(-\frac{p}{2},y_1\right)$. Επομένως, το μέσον του *ΓΕ* έχει συντεταγμένες $\left(0,\frac{y_1}{2}\right)$ και το μέσον της *AB* έχει



συντεταγμένες επίσης $\left(0,\frac{y_1}{2}\right)$. Άρα, τα τμήματα *AB* και *ΓΕ* διχοτομούνται.

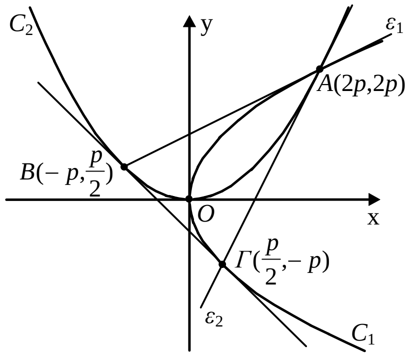
Επίσης

$$\overrightarrow{\Gamma E}\cdot\overrightarrow{AB}=(p,-y_1)(-2x_1,-y_1)=-2px_1+y_1^2=-2px_1+2px_1=0\,,$$

που σημαίνει ότι $\overrightarrow{\Gamma E} \perp \overrightarrow{AB}$. Αφού, λοιπόν, τα τμήματα AB και ΓE διχοτομούνται καθέτως, το $AEB\Gamma$ είναι ρόμβος και το κέντρο του $K\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$ βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

8. (i) Τα σημεία τομής των C_1 και C_2 προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y^2 = 2px & (1) \\ x^2 = 2py & (2) \end{cases}$$



Από την (2) έχουμε $y = \frac{x^2}{2p}$.

Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε

$$\frac{x^4}{4p^2} = 2px \Leftrightarrow x^4 - 8p^3 x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8p^3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2p,$$

οπότε οι αντίστοιχες τιμές του y είναι $y = 0$, $y = 2p$. Άρα, οι παράλληλες τέμνονται στα σημεία $O(0,0)$ και $A(2p,2p)$.

(ii) Η εφαπτομένη ε_1 της C_1 στο $A(2p,2p)$ έχει εξίσωση

$$y \cdot 2p = p(x + 2p) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + p \qquad (1)$$

και τέμνει την C_2 στο σημείο $B\left(-p, \frac{p}{2}\right)$.

Η εφαπτομένη ε_2 της C_2 στο $A(2p,2p)$ έχει εξίσωση

$$x \cdot 2p = p(y + 2p) \Leftrightarrow y = 2x - 2p \qquad (2)$$

και τέμνει την C_1 στο σημείο $\Gamma\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

Επομένως, η εφαπτομένη της C_1 στο $\Gamma\left(\frac{p}{2}, -p\right)$ έχει εξίσωση

$$y(-p) = p\left(x + \frac{p}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x - \frac{p}{2},$$

ενώ η εφαπτομένη της C_2 στο $B\left(-p, \frac{p}{2}\right)$ έχει εξίσωση

$$x(-p) = p\left(y + \frac{p}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x - \frac{p}{2}.$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι η εφαπτομένη της C_2 στο B και η εφαπτομένη της C_1 στο Γ συμπίπτουν. Άρα η AB είναι κοινή εφαπτομένη των C_1, C_2.

3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Είναι $2\gamma = E'E = 8$ και $2\alpha = 10$, οπότε $\gamma = 4$ και $\alpha = 5$. Άρα $\beta^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ και επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$, η έλλειψη θα έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

(ii) Είναι $2\gamma = E'E = 10$ και $2\alpha = 26$, οπότε $\gamma = 5$ και $\alpha = 13$. Άρα $\beta^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ και επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $y'y$, η έλλειψη έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1.$$

(iii) Είναι $\gamma = 12$, και $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{12}{13}$, οπότε $\alpha = 13$. Άρα $\beta^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, οπότε η έλλειψη θα έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

(iv) Είναι $\gamma = 4$, οπότε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = \alpha^2 - 16$, με $\alpha^2 > 16$. Άρα η εξίσωση της έλλειψης θα έχει τη μορφή:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-16}=1.$$

Αφού, τώρα, το $M\left(4,\frac{9}{5}\right)$ είναι σημείο της έλλειψης, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Θα έχουμε δηλαδή:

$$\frac{4^2}{\alpha^2}+\frac{\left(\frac{9}{5}\right)^2}{\alpha^2-16}=1 \Leftrightarrow \frac{16}{\alpha^2}+\frac{81}{25(\alpha^2-16)}=1$$

$$\Leftrightarrow 400(\alpha^2-16)+81\alpha^2=25\alpha^2(\alpha^2-16)$$

$$\Leftrightarrow 25\alpha^4-881\alpha^2+6400=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2=\frac{881\pm369}{50}=\left\langle\begin{array}{l}25\\10,24<16 \quad (\text{απορρίπτεται})\end{array}\right.$$

Άρα, η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

(v) Αφού οι εστίες είναι πάνω στον $y'y$ η εξίσωση της έλλειψης θα είναι:

$$\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1 \qquad (\alpha^2>\beta^2).$$

Τώρα, αφού τα $M_1(1,1)$ και $M_2\left(2,\frac{1}{2}\right)$ είναι τα σημεία της έλλειψης, οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Άρα, θα έχουμε:

$$\begin{cases}\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2}=1\\ \frac{4}{\beta^2}+\frac{\frac{1}{4}}{\alpha^2}=1\end{cases}$$

Θέτουμε $\frac{1}{\beta^2}=\kappa$ και $\frac{1}{\alpha^2}=\lambda$ και έχουμε

$$\begin{cases}\kappa+\lambda=1\\ 4\kappa+\frac{1}{4}\lambda=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa=1-\lambda\\ 4(1-\lambda)+\frac{\lambda}{4}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa=1-\lambda\\ 16-16\lambda+\lambda=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1-\lambda \\ 15\lambda = 12 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1-\dfrac{4}{5} \\ \lambda = \dfrac{4}{5} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \dfrac{1}{5} \\ \lambda = \dfrac{4}{5} \end{cases}.$$

Άρα, $\alpha^2 = \dfrac{5}{4}$ και $\beta^2 = 5$, οπότε η εξίσωση της έλλειψης θα είναι:

$$\frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}y^2 = 1.$$

2. (i) Η εξίσωση $x^2 + 4y^2 = 4$ γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1,$$

οπότε είναι $\alpha = 2$ και $\beta = 1$. Έτσι έχουμε $\gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, οπότε $\gamma = \sqrt{3}$ και άρα $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Τέλος, οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-\sqrt{3},0)$ και $E(\sqrt{3},0)$.

(ii) Η εξίσωση $169x^2 + 144y^2 = 24336$ γράφεται ισοδύναμα

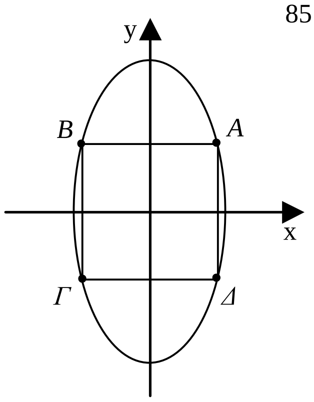
$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$$

ή

$$\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{13^2} = 1,$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\alpha = 13$, $\beta = 12$, $\gamma = \sqrt{169-144} = \sqrt{25} = 5$ και $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{5}{13}$. Οι εστίες βρίσκονται πάνω στον άξονα $y'y$ και είναι τα σημεία $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$.

3. Έστω *ΑΒΓΔ* το ζητούμενο τετράγωνο. Αν (x_1, y_1) είναι οι συντεταγμένες του σημείου *Α*, τότε οι συντεταγμένες των σημείων *Β*, *Γ* και *Δ* θα είναι $(-x_1, y_1)$, $(-x_1, -y_1)$ και $(x_1, -y_1)$ αντιστοίχως. Επειδή $AB = A\Delta$ θα ισχύει $2x_1 = 2y_1$ οπότε θα είναι



$$y_1 = x_1$$

(1)

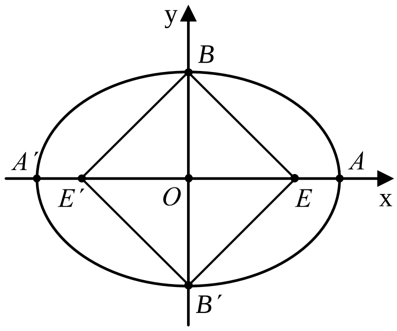
Άρα, οι συντεταγμένες του A θα είναι (x_1, x_1) και, επειδή επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης, θα έχουμε

$$4x_1^2 + x_1^2 = 4 \Leftrightarrow 5x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (αν } x_1 > 0\text{)}.$$

Έτσι το ζητούμενο τετράγωνο θα έχει κορυφές:

$$A\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right),\quad B\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right),\quad \Gamma\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right),\quad \Delta\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

4. Η εξίσωση $x^2 + 2y^2 = 4$ γράφεται ισοδύμανα



$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\sqrt{2}^2} = 1$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt{2}$. Επομένως, οι κορυφές B και B' έχουν συντεταγμένες $(0, \sqrt{2})$ και $(0, -\sqrt{2})$ αντιστοίχως, ενώ οι εστίες E και E' έχουν συντεταγμένες $(\sqrt{2}, 0)$ και $(-\sqrt{2}, 0)$ αντιστοίχως. Άρα, το τετράπλευρο $EBE'B'$ είναι τετράγωνο, αφού οι διαγώνιες του είναι ίσες, κάθετες και διχοτομούνται.

5. Αν το $M(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, τότε το αντιδιαμετρικό του θα είναι το $M'(-x_1, -y_1)$, λόγω της συμμετρίας της έλλειψης ως προς το $O(0,0)$. Έτσι, η εφαπτομένη της έλλειψης στο $M(x_1, y_1)$ είναι η $\frac{x_1 x}{\alpha^2} + \frac{y_1 y}{\beta^2} = 1$, ενώ στο $M'(-x_1, -y_1)$ είναι η $\frac{-x_1 x}{\alpha^2} + \frac{-y_1 y}{\beta^2} = 1$. Οι εφαπτομένες αυτές είναι παράλληλες, αφού οι συντελεστές διεύθυνσής τους, για $y_1 \neq 0$, είναι ίσοι.

Αν $y_1=0$, που ισχύει όταν τα M,M' ταυτιστούν με τα A και A', οι εφαπτομένες σ' αυτά είναι παράλληλες, αφού είναι κάθετες και οι δύο στον άξονα $x'x$.

6. Η εφαπτομένη ε της έλλειψης $3x^2+y^2=4$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $3xx_1+yy_1=4$ και άρα συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-\dfrac{3x_1}{y_1}$.

Επομένως:

(i) Η εφαπτομένη ε είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-3x+1$, αν και μόνο αν $\dfrac{-3x_1}{y_1}=-3$ ή, ισοδύναμα,

$$y_1=x_1.$$

Όμως το $M(x_1,y_1)$ είναι σημείο της έλλειψης. Άρα, θα έχουμε: $3x_1^2+y_1^2=4$ και, επειδή $y_1=x_1$, θα ισχύει

$$3x_1^2+x_1^2=4 \Leftrightarrow 4x_1^2=4 \Leftrightarrow x_1^2=1 \Leftrightarrow x_1=\pm 1.$$

Επομένως,

$$(x_1,y_1)=(1,1) \quad \text{ή} \quad (x_1,y_1)=(-1,-1).$$

Έτσι, υπάρχουν δύο ευθείες εφαπτόμενες της έλλειψης, που είναι παράλληλες στην ευθεία $y=-3x+1$. Οι εφαπτόμενες αυτές είναι οι $3x+y=4$ και $-3x-y=4$.

(ii) Η εφαπτομένη ε είναι κάθετη στην ευθεία $y=\dfrac{1}{2}x$, αν και μόνο αν $\dfrac{-3x_1}{y_1}\cdot\dfrac{1}{2}=-1$ ή, ισοδύναμα, $y_1=\dfrac{3x_1}{2}$. Άρα, το σημείο M θα έχει συντεταγμένες $\left(x_1,\dfrac{3x_1}{2}\right)$ και, αφού ανήκει στην έλλειψη, θα είναι:

$$3x_1^2+\left(\frac{3x_1}{2}\right)^2=4 \Leftrightarrow 3x_1^2+\frac{9x_1^2}{4}=4 \Leftrightarrow 21x_1^2=16 \Leftrightarrow x_1=\pm\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Επομένως

$$(x_1,y_1)=\left(\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{6}{\sqrt{21}}\right) \quad \text{ή} \quad (x_1,y_1)=\left(-\frac{4}{\sqrt{21}},-\frac{6}{\sqrt{21}}\right).$$

Άρα, οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι ευθείες:

$$\frac{3\cdot 4}{\sqrt{21}}x+\frac{6}{\sqrt{21}}y=4 \quad \text{και} \quad -\frac{3\cdot 4}{\sqrt{21}}x-\frac{6}{\sqrt{21}}y=4\,,$$

οι οποίες γράφονται

$$6x+3y-2\sqrt{21}=0 \quad \text{και} \quad 6x+3y+2\sqrt{21}=0\,.$$

(iii) Η εφαπτομένη ε διέρχεται από το $M(0,4)$, αν και μόνο αν η εξίσωση της ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του *Μ*. Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει $3x_1\cdot 0+y_1\cdot 4=4$ ή, ισοδύναμα, $y_1=1$. Επειδή το $M(x_1,y_1)$ ανήκει στην έλλειψη, θα έχουμε:

$$3x_1^2+y_1^2=4 \Leftrightarrow 3x_1^2+1=4 \Leftrightarrow x_1^2=1 \Leftrightarrow x_1=\pm 1\,.$$

Επομένως

$$(x_1,y_1)=(1,1) \quad \text{ή} \quad (x_1,y_1)=(-1,1)$$

Άρα, θα έχουμε δύο εφαπτομένες της έλλειψης που διέρχονται από το $M(0,4)$, τις ευθείες $3x+y=4$ και $-3x+y=4$.

7. Οι εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2+4y^2=100$ στα σημεία M_1, M_2, M_3 και M_4 θα είναι, αντιστοίχως, οι:

$$4\sqrt{5}x+4\sqrt{5}y=100 \Leftrightarrow y=-x+5\sqrt{5}$$
$$-4\sqrt{5}x+4\sqrt{5}y=100 \Leftrightarrow y=x+5\sqrt{5}$$
$$-4\sqrt{5}x-4\sqrt{5}y=100 \Leftrightarrow y=-x-5\sqrt{5}$$
$$4\sqrt{5}x-4\sqrt{5}y=100 \Leftrightarrow y=x-5\sqrt{5}$$

Οι ευθείες αυτές είναι ανά δύο (πρώτη-τρίτη) και (δεύτερη-τέταρτη) παράλληλες μεταξύ τους και ανά δύο κάθετες (πρώτη-δεύτερη), (τρίτη-τέταρτη) και τέμνουν μάλιστα τον $y'y$ στα ίδια σημεία. Έτσι το τετράπλευρο που ορίζουν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με κάθετες διαγώνιες. Άρα το τετράπλευρο αυτό θα είναι τετράγωνο.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αρκεί να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες του *Μ* επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\alpha^2(1-t^2)^2}{\alpha^2(1+t^2)^2}+\frac{4\beta^2 t^2}{\beta^2(1+t^2)^2}=\frac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1$$

2. Αν $M(x_1,y_1)$ είναι σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2, τότε θα ισχύει

$$\alpha y_1=\lambda\beta(\alpha+x_1) \quad \text{και} \quad \lambda\alpha y_1=\beta(\alpha-x_1)$$

οπότε, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη της ισότητες, θα έχουμε

$$\lambda\alpha^2 y_1^2=\lambda\beta^2(\alpha^2-x_1^2)$$

$$\alpha^2 y_1^2=\alpha^2\beta^2-\beta^2 x_1^2 \qquad (\text{αφού } \lambda\neq 0)$$

$$\beta^2 x_1^2+\alpha^2 y_1^2=\alpha^2\beta^2$$

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}=1.$$

Άρα, το σημείο $M(x_1,y_1)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

3. Αν θέσουμε $r=(ME)$ και $r'=(ME')$, τότε, σύμφωνα με τον ορισμό της έλλειψης, θα ισχύει

$$r'+r=2\alpha \qquad (1)$$

Όμως, είναι

$$r'=\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2} \quad \text{και} \quad r=\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}$$

Επομένως, έχουμε

$$r'^2-r^2=4\gamma x$$

ή, ισοδύναμα,

$$(r'+r)(r'-r)=4\gamma x.$$

Οπότε, λόγω της (1), θα ισχύει

$$r'-r=2\frac{\gamma}{\alpha}x=2\varepsilon x. \qquad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) και έχουμε

$$r'=\alpha+\varepsilon x \quad \text{και} \quad r=\alpha-\varepsilon x$$

4. Επειδή η έλλειψη έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x=\alpha\text{συν}\varphi \quad \text{και} \quad y=\beta\text{ημ}\varphi\,, \quad \varphi\in[0,2\pi)$$

οι συντεταγμένες (x_1, y_1) του M_1 θα είναι της μορφής

$$x_1=\alpha\text{συν}\varphi_1 \quad \text{και} \quad y_1=\beta\text{ημ}\varphi_1\,, \quad \varphi_1\in[0,2\pi) \qquad (1)$$

οπότε η εξίσωση $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$ της εφαπτομένης ε της έλλειψης στο σημείο M_1 θα πάρει τη μορφή:

$$\frac{x\text{συν}\varphi_1}{\text{α}}+\frac{y\text{ημ}\varphi_1}{\text{β}}=1$$

ή

$$(\beta\text{συν}\varphi_1)x+(\alpha\text{ημ}\varphi_1)y-\alpha\beta=0 \qquad (2)$$

Έτσι, θα έχουμε

$$d=d(\Gamma,\varepsilon)=\frac{|\alpha\gamma\text{ημ}\varphi_1-\alpha\beta|}{\sqrt{\text{β}^2\text{συν}^2\varphi_1+\alpha^2\text{ημ}^2\varphi_1}}=\frac{\alpha|\gamma\text{ημ}\varphi_1-\beta|}{\sqrt{\beta^2\text{συν}^2\varphi_1+\alpha^2\text{ημ}^2\varphi_1}}$$

$$d'=d(\Gamma',\varepsilon)=\frac{|-\alpha\gamma\text{ημ}\varphi_1-\alpha\beta|}{\sqrt{\text{β}^2\text{συν}^2\varphi_1+\alpha^2\text{ημ}^2\varphi_1}}=\frac{\alpha|\gamma\text{ημ}\varphi_1+\beta|}{\sqrt{\beta^2\text{συν}^2\varphi_1+\alpha^2\text{ημ}^2\varphi_1}}\,,$$

οπότε θα ισχύει

$$d^2+d'^2=\frac{\alpha^2(\gamma\text{ημ}\varphi_1-\beta)^2+\alpha^2(\gamma\text{ημ}\varphi_1+\beta)^2}{\text{β}^2\text{συν}^2\varphi_1+\alpha^2\text{ημ}^2\varphi_1}=\frac{2\alpha^2(\gamma^2\text{ημ}^2\varphi_1+\beta^2)}{\beta^2\text{συν}^2\varphi_1+\alpha^2\text{ημ}^2\varphi_1}$$

$$=\frac{2\alpha^2\left((\alpha^2-\beta^2)\text{ημ}^2\varphi_1+\beta^2\right)}{\beta^2\text{συν}^2\varphi_1+\alpha^2\text{ημ}^2\varphi_1}=\frac{2\alpha^2(\alpha^2\text{ημ}^2\varphi_1+\beta^2\text{συν}^2\varphi_1)}{\beta^2\text{συν}^2\varphi_1+\alpha^2\text{ημ}^2\varphi_1}=2\alpha^2\,.$$

5. Είναι

$$(M_1N_2)^2=(x_1-\varepsilon x_2)^2+y_1^2=x_1^2+\varepsilon^2x_2^2-2\varepsilon x_1x_2+y_1^2$$

$$(M_2N_1)^2=(x_2-\varepsilon x_1)^2+y_2^2=x_2^2+\varepsilon^2x_1^2-2\varepsilon x_1x_2+y_2^2$$

Επομένως, για να δείξουμε ότι $(M_1N_2)=(M_2N_1)$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$x_1^2+\varepsilon^2x_2^2-2\varepsilon x_1x_2+y_1^2=x_2^2+\varepsilon^2x_1^2-2\varepsilon x_1x_2+y_2^2$$

ή

$$x_1^2+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}x_2^2+y_1^2=x_2^2+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}x_1^2+y_2^2$$

ή $$\alpha^2 x_1^2+\gamma^2 x_2^2+\alpha^2 y_1^2=\alpha^2 x_2^2+\gamma^2 x_1^2+\alpha^2 y_2^2$$

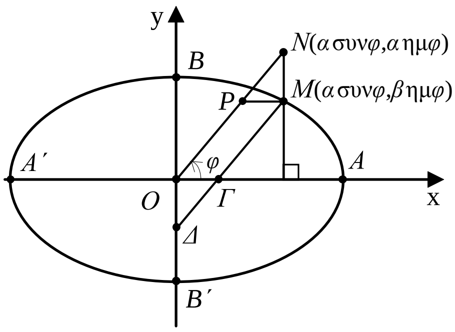
ή $$(\alpha^2-\gamma^2)x_1^2+\alpha^2 y_1^2=(\alpha^2-\gamma^2)x_2^2+\alpha^2 y_2^2$$

ή $$\beta^2 x_1^2+\alpha^2 y_1^2=\beta^2 x_2^2+\alpha^2 y_2^2$$

ή $$\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}=\frac{x_2^2}{\alpha^2}+\frac{y_2^2}{\beta^2}$$

που ισχύει, αφού τα σημεία $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ είναι σημεία της έλλειψης.

6. **α΄ τρόπος:** Έστω *P* το σημείο τομής της *ON* και του κύκλου με κέντρο *O* και ακτίνα *β*. Είδαμε στις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης, ότι το σημείο *M* είναι το σημείο τομής της οριζόντιας ευθείας από το *P* και της κατακόρυφης από το *N*. Επομένως, τα τετράπλευρα *MNOΔ* και *MPOΓ* είναι παραλληλόγραμμα, οπότε θα έχουμε



$$(M\Delta)=(ON)=\alpha \quad \text{και} \quad (M\Gamma)=(OP)=\beta$$

β΄ τρόπος: Αν φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{ON}$ με τον άξονα $x'x$, τότε οι συντεταγμένες του *M* θα είναι $(\alpha\text{συν}\varphi,\beta\text{ημ}\varphi)$, ενώ οι συντεταγμένες του *N* θα είναι $(\alpha\text{συν}\varphi,\alpha\text{ημ}\varphi)$. Επομένως, η ευθεία *MΔ* θα έχει εξίσωση

$$y-\beta\text{ημ}\varphi=\text{εφ}\varphi(x-\alpha\text{συν}\varphi,) \qquad (1)$$

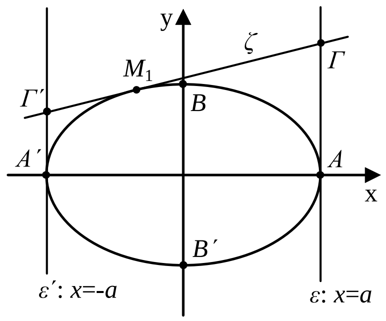
και άρα θα τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία

$$\Gamma\big((\alpha-\beta)\text{συν}\varphi,0\big) \quad \text{και} \quad \Delta\big(0,-(\alpha-\beta)\text{ημ}\varphi\big).$$

Επομένως

$$(M\Delta)=\sqrt{\alpha^2\text{συν}^2\varphi+\alpha^2\text{ημ}^2\varphi}=\sqrt{\alpha^2(\text{συν}^2\varphi+\text{ημ}^2\varphi)}=\alpha$$

$$(M\Gamma)=\sqrt{\beta^2\text{συν}^2\varphi+\beta^2\text{ημ}^2\varphi}=\sqrt{\beta^2(\text{συν}^2\varphi+\text{ημ}^2\varphi)}=\beta\ .$$



7. Η ζ έχει εξίσωση $\dfrac{xx_1}{\alpha^2}+\dfrac{yy_1}{\beta^2}=1$, ενώ οι ε και ε' έχουν εξισώσεις $x=\alpha$ και $x=-\alpha$ αντιστοίχως. Επομένως, οι συντεταγμένες των Γ και Γ' είναι οι λύσεις των συστημάτων

$$\begin{cases} x=\alpha \\ \dfrac{xx_1}{\alpha^2}+\dfrac{yy_1}{\beta^2}=1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x=-\alpha \\ \dfrac{xx_1}{\alpha^2}+\dfrac{yy_1}{\beta^2}=1 \end{cases}$$

αντιστοίχως. Λύνουμε τα συστήματα αυτά και βρίσκουμε ότι τα Γ και Γ' έχουν συντεταγμένες $\left(\alpha, \dfrac{\beta^2(\alpha-x_1)}{\alpha y_1}\right)$ και $\left(-\alpha, \dfrac{\beta^2(\alpha+x_1)}{\alpha y_1}\right)$ αντιστοίχως. Επομένως:

(i) $(A\Gamma)=\dfrac{\beta^2(\alpha-x_1)}{\alpha|y_1|}$ και $(A'\Gamma')=\dfrac{\beta^2(\alpha+x_1)}{\alpha|y_1|}$ οπότε

$$(A\Gamma)(A'\Gamma')=\frac{\beta^4(\alpha^2-x_1^2)}{\alpha^2 y_1^2}=\beta^2\cdot\frac{\alpha^2\beta^2-\beta^2 x_1^2}{\alpha^2 y_1^2}=\beta^2\cdot\frac{\alpha^2 y_1^2}{\alpha^2 y_1^2}=\beta^2$$

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{E\Gamma}\perp\overrightarrow{E\Gamma'}$ ή, ισοδύναμα, ότι $\overrightarrow{E\Gamma}\cdot\overrightarrow{E\Gamma'}=0$. Έχουμε λοιπόν:

$$\overrightarrow{E\Gamma}=\left(\alpha-\gamma, \frac{\beta^2(\alpha-x_1)}{\alpha y_1}\right) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{E\Gamma'}=\left(-(\alpha+\gamma), \frac{\beta^2(\alpha+x_1)}{\alpha y_1}\right)$$

οπότε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E\Gamma}\cdot\overrightarrow{E\Gamma'}&=(\gamma^2-\alpha^2)+\frac{\beta^4(\alpha^2-x_1^2)}{\alpha^2 y_1^2}\\ &=\gamma^2-\alpha^2+\beta^2\cdot\frac{\alpha^2\beta^2-\beta^2 x_1^2}{\alpha^2 y_1^2}\\ &=-\beta^2+\beta^2\cdot\frac{\alpha^2 y_1^2}{\alpha^2 y_1^2}\end{aligned}$$

$$=-\beta^2+\beta^2=0\,.$$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\overrightarrow{E'\Gamma}\perp\overrightarrow{E'\Gamma'}$.

8. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$. Άρα, τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία

$$\Gamma\left(\frac{\alpha^2}{x_1},0\right) \quad \text{και} \quad \Delta\left(0,\frac{\beta^2}{y_1}\right)$$

αντιστοίχως. Επομένως έχουμε $p=\frac{\alpha^2}{x_1}$ και $q=\frac{\beta^2}{y_1}$, οπότε

$$\frac{\alpha^2}{p^2}+\frac{\beta^2}{q^2}=\frac{\alpha^2}{\frac{\alpha^4}{x_1^2}}+\frac{\beta^2}{\frac{\beta^4}{y_1^2}}=\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}=1\,,$$

αφού το σημείο $M_1(x_1,y_1)$ ανήκει στην έλλειψη.

3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Είναι $\gamma=13$ και $\alpha=5$, οπότε $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}=\sqrt{169-25}=12$. Άρα, η εξίσωση της υπερβολής είναι

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1\,,$$

αφού έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$.

(ii) Είναι $\gamma=10$ και $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{3}$. Επομένως, $\alpha=\frac{3}{5}\gamma=6$, οπότε $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}=$ $=\sqrt{100-36}=8$. Άρα, η εξίσωση της υπερβολής είναι

$$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1,$$

αφού έχει τις εστίες της στον άξονα $y'y$.

(iii) Είναι $\gamma=\sqrt{5}$, οπότε $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2=5-\alpha^2$. Έτσι η εξίσωση της υπερβολής παίρνει τη μορφή

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{5-\alpha^2}=1.$$

Επειδή το σημείο $M(2\sqrt{2},1)$ ανήκει στην υπερβολή, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή θα ισχύει

$$\frac{8}{\alpha^2}-\frac{1}{5-\alpha^2}=1 \Leftrightarrow 8(5-\alpha^2)-\alpha^2=\alpha^2(5-\alpha^2)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^4-14\alpha^2+40=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2=\frac{14\pm 6}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2=10 \quad \text{ή} \quad \alpha^2=4$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2=4, \quad \text{αφού} \quad \alpha^2<\gamma^2=5 .$$

Άρα, η εξίσωση της υπερβολής θα είναι

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1 .$$

(iv) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) *Η υπερβολή έχει τις εστίες της στον άξονα* $x'x$. Τότε θα έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (1)$$

Επειδή, όμως, έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{4}{3}x$ και $y=-\frac{4}{3}x$, θα ισχύει $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{4}{3}$, οπότε θα έχουμε $\beta=\frac{4}{3}\alpha$. Έτσι, η (1) παίρνει τη μορφή

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\frac{16}{9}\alpha^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{9y^2}{16\alpha^2}=1 \qquad (2)$$

Επειδή, επιπλέον, το σημείο $M(3\sqrt{2},4)$ ανήκει στην υπερβολή, θα ισχύει

$$\frac{(3\sqrt{2})^2}{\alpha^2}-\frac{9\cdot 4^2}{16\alpha^2}=1 \Leftrightarrow \frac{18}{\alpha^2}-\frac{9}{\alpha^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2=9 \qquad \Leftrightarrow \alpha=3$$

Επομένως, λόγω της (2), η εξίσωση της υπερβολής είναι η:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 .$$

β) *Η υπερβολή έχει τις εστίες της στον άξονα* $y'y$. Τότε θα έχει εξίσωση

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1.$$

Αν εργαστούμε όπως πριν, θα βρούμε ότι δεν υπάρχει υπερβολή τέτοιας μορφής που να έχει ασύμπτωτες τις $y=\frac{4}{3}x$, $y=-\frac{4}{3}x$ και να περνάει από το σημείο $M(3\sqrt{2},4)$.

ΣΧΟΛΙΟ Μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι το σημείο $M(3\sqrt{2},4)$ βρίσκεται στη γωνία των ασυμπτώτων που περιέχει τον Ox . Επομένως, το M θα ανήκει στην υπερβολή που έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$.

2. (i) Έχουμε:

$$9x^2-16y^2=144\Leftrightarrow\frac{9x^2}{144}-\frac{16y^2}{144}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$$

Επομένως, $\alpha=4$ και $\beta=3$, οπότε $\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=5$. Άρα, η υπερβολή έχει εστίες τα σημεία $E'(-5,0)$, $E(5,0)$, εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{5}{4}$ και ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{3}{4}x$, $y=-\frac{3}{4}x$.

(ii) Έχουμε

$$x^2-y^2=4\Leftrightarrow\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{2^2}=1.$$

Επομένως, $\alpha=2$ και $\beta=2$, οπότε $\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2\sqrt{2}$. Άρα, η υπερβολή έχει εστίες τα σημεία $E'(-2\sqrt{2},0)$, $E(2\sqrt{2},0)$, εκκεντρότητα $\varepsilon=\sqrt{2}$ και ασύμπτωτες τις ευθείες $y=x$, $y=-x$.

(iii) Έχουμε

$$144x^2-25y^2=3600\Leftrightarrow\frac{144x^2}{3600}-\frac{25y^2}{3600}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{12^2}=1.$$

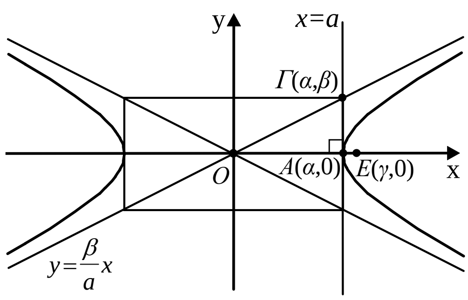
Επομένως, $\alpha=5$ και $\beta=12$, οπότε $\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=13$. Άρα, η υπερβολή έχει εστίες τα σημεία $E'(-13{,}0)$, $E(13{,}0)$, εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{13}{5}$ και ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{12}{5}x$, $y=-\frac{12}{5}x$.

3. Έχουμε

$$\frac{\beta}{\alpha}=\text{εφ}30^0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}=\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2-1=\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon^2=\frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \varepsilon=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4. Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο $A(\alpha,0)$ έχει εξίσωση $x=\alpha$. Επομένως, οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y=\frac{\beta}{\alpha}x \\ x=\alpha \end{cases},$$



η οποία, προφανώς, είναι το ζεύγος $(x,y)=(\alpha,\beta)$. Άρα, είναι

$$(O\Gamma)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\gamma^2}=\gamma=(OE).$$

5. Η εφαπτομένη ε της C στο $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1 \qquad (1)$$

και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\frac{\beta^2x_1}{\alpha^2y_1}$. Επειδή η ζ είναι κάθετη στην ε, θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\zeta=-\frac{\alpha^2y_1}{\beta^2x_1}$ και επειδή, επιπλέον, διέρχεται από το $M_1(x_1,y_1)$, θα έχει εξίσωση.

$$y-y_1=-\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}(x-x_1) \qquad (2)$$

Όμως, η ε περνάει από το $M_2(0,-\beta)$ και η ζ από το $M_3(2\alpha\sqrt{2},0)$. Επομένως, λόγω των (1) και (2), θα ισχύει

$$\begin{cases} \dfrac{\beta y_1}{\beta^2}=1 \\ -y_1=-\dfrac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}(2\alpha\sqrt{2}-x_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=\beta \\ \beta^2 x_1=\alpha^2(2\alpha\sqrt{2}-x_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1=\beta \\ (\alpha^2+\beta^2)x_1=2\alpha^3\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1=\beta \\ x_1=\dfrac{2\alpha^3\sqrt{2}}{\gamma^2} \end{cases} \qquad (3)$$

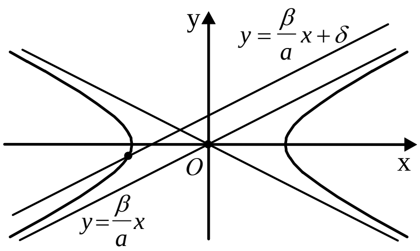
Επειδή το σημείο $M_1(x_1,y_1)$ ανήκει στην υπερβολή C, θα ισχύει $\dfrac{x_1^2}{\alpha^2}-\dfrac{y_1^2}{\beta^2}=1$, οπότε, λόγω την (3), θα έχουμε

$$\frac{8\alpha^6}{\gamma^4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{8\alpha^4}{\gamma^4}=2 \Leftrightarrow 4\alpha^4=\gamma^4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^4=4 \Leftrightarrow \varepsilon^4=4$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}\,.$$

6. • Έστω ζ μια ευθεία παράλληλη προς την ασύμπτωτη $\varepsilon: y=\dfrac{\beta}{\alpha}x$ της υπερβολής $C:\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$. Τότε η ζ θα έχει εξίσωση



$$y=\frac{\beta}{\alpha}x+\delta, \quad \delta\neq 0\,.$$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ζ και της C, αρκεί να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y=\dfrac{\beta}{\alpha}x+\delta & (1) \\ \dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1 & (2) \end{cases}$$

Έχουμε λοιπόν:

$$(2)\Leftrightarrow \beta^2x^2-\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \beta^2x^2-\alpha^2\left(\frac{\beta}{\alpha}x+\delta\right)^2=\alpha^2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^2x^2-\alpha^2\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2+\delta^2+2\frac{\beta\delta}{\alpha}x\right)=\alpha^2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^2x^2-\beta^2x^2-\alpha^2\delta^2-2\alpha\beta\delta x=\alpha^2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha\beta\delta x=-\alpha^2(\beta^2+\delta^2)$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\alpha(\beta^2+\delta^2)}{2\beta\delta}.$$

Επομένως, λόγω της (1), είναι

$$y=\frac{\beta}{\alpha}\left(-\frac{\alpha(\beta^2+\delta^2)}{2\beta\delta}\right)+\delta=-\frac{\beta^2+\delta^2}{2\delta}+\delta=\frac{\delta^2-\beta^2}{2\delta}.$$

Άρα, η ευθεία ζ και η υπερβολή C έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $M\left(-\dfrac{\alpha(\beta^2+\delta^2)}{2\beta\delta},\dfrac{\delta^2-\beta^2}{2\delta}\right)$.

Αν η ζ είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $\varepsilon': \mathrm{y}=-\dfrac{\beta}{\alpha}x$, τότε και πάλι θα έχει με την C ένα μόνο κοινό σημείο.

- Η υπερβολή $4x^2-y^2=1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείας

$$y=2x \quad \text{και} \quad y=-2x.$$

Επομένως, η ευθεία $2x-y=1$, που γράφεται $y=2x-1$, είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y=2x$ και άρα, σύμφωνα με όσα αποδείξαμε πριν, θα έχει με την υπερβολή $4x^2 - y^2 = 1$ ένα μόνο κοινό σημείο το $M\left(\frac{1}{2},1\right)$, αφού $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ και $\delta = -1$.

7. Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της υπερβολής $x^2 - 4y^2 = 12$ σε ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι η

$$xx_1 - 4yy_1 = 12 \tag{1}$$

και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_\varepsilon = \frac{x_1}{4y_1} \tag{2}$$

Επομένως:

(i) Η ε είναι παράλληλη προς την ευθεία $\zeta: y = x + 1$, αν και μόνο αν ισχύει $\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta$, δηλαδή $\frac{x_1}{4y_1} = 1$ ή, ισοδύναμα,

$$x_1 = 4y_1 \tag{3}$$

Όμως, το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην υπερβολή. Επομένως, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή θα ισχύει

$$x_1^2 - 4y_1^2 = 12 \tag{4}$$

Αν λύσουμε το σύστημα των (3) και (4) βρίσκουμε ότι

$$(x_1, y_1) = (4,1) \quad \text{ή} \quad (x_1, y_1) = (-4,-1).$$

Άρα, υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της υπερβολής που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = x + 1$. Οι εφαπτόμενες αυτές, λόγω της (1), έχουν εξισώσεις

$$4x - 4y = 12 \quad \text{και} \quad -4x + 4y = 12,$$

που γράφονται ισοδύναμα

$$y = x - 3 \quad \text{και} \quad y = x + 3$$

αντιστοίχως.

(ii) Η ε είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: y = -\frac{4}{\sqrt{3}}x$, αν και μόνο αν ισχύει $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1$, δηλαδή $\frac{x_1}{4y_1}\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -1$ ή, ισοδύναμα,

$$x_1 = \sqrt{3} y_1 . \quad (5)$$

Όμως, το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην υπερβολή. Επομένως, θα ισχύει

$$x_1^2 - 4y_1^2 = 12 . \quad (6)$$

Έτσι η (6), λόγω της (5), γράφεται $3y_1^2 - 4y_1^2 = 12$ ή, ισοδύναμα, $y_1^2 = -12$, που είναι αδύνατη. Άρα, δεν υπάρχει εφαπτομένη της υπερβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: y = -\frac{4}{\sqrt{3}} x$.

(iii) Η ε διέρχεται από το σημείο $M(3,0)$, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (1), δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει $3x_1 = 12$ ή, ισοδύναμα,

$$x_1 = 4 \quad (7)$$

Όμως, όπως είδαμε πιο πριν, ισχύει

$$x_1^2 - 4y_1^2 = 12 . \quad (8)$$

Αν λύσουμε το σύστημα των (7) και (8), βρίσκουμε ότι

$$(x_1, y_1) = (4,1) \quad ή \quad (x_1, y_1) = (4,-1) .$$

Άρα, υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της υπερβολής που να διέρχονται από το σημείο $M(3,0)$. Οι εφαπτόμενες αυτές, λόγω της (1), έχουν εξισώσεις

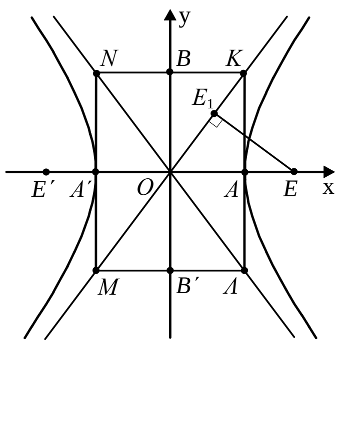
$$4x - 4y = 12 \quad και \quad 4x + 4y = 12 ,$$

που γράφονται ισοδύναμα

$$y = x - 3 \quad και \quad y = -x + 3$$

αντιστοίχως.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ



1. Έστω $K\Lambda MN$ το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής. Τότε (OA)=α και (AK)=β οπότε $(OK)^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ και άρα $(OK) = \gamma = (OE)$. Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα AOK και E_1OE είναι ίσα, αφού έχουν μία οξεία γωνία κοινή και τις υποτείνουσες ίσες. Άρα θα ισχύει

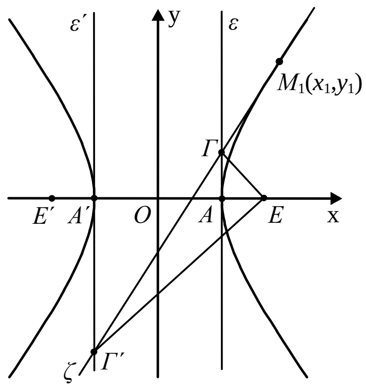
$$(OE_1) = (OA) = \alpha \quad και \quad (EE_1) = (AK) = \beta .$$

2. Έστω ζ η εφαπτομένη που τέμνει τις ε και ε' στα σημεία Γ και Γ' αντιστοίχως. Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της ζ θα είναι

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1 \qquad (1)$$

Επομένως, οι συντεταγμένες των Γ και Γ' είναι οι λύσεις των συστημάτων

$$\begin{cases} x=\alpha \\ \dfrac{xx_1}{\alpha^2}-\dfrac{yy_1}{\beta^2}=1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x=-\alpha \\ \dfrac{xx_1}{\alpha^2}-\dfrac{yy_1}{\beta^2}=1 \end{cases}$$



αντιστοίχως. Λύνουμε τα συστήματα αυτά και βρίσκουμε ότι το Γ έχει συντεταγμένες $\left(\alpha, \dfrac{\beta^2(x_1-\alpha)}{\alpha y_1}\right)$, ενώ το Γ' έχει συντεταγμένες $\left(-\alpha, \dfrac{\beta^2(x_1+\alpha)}{-\alpha y_1}\right)$.

Επομένως, έχουμε

$$(A\Gamma)=\frac{\beta^2|x_1-\alpha|}{\alpha|y_1|} \quad \text{και} \quad (A'\Gamma')=\frac{\beta^2|x_1+\alpha|}{\alpha|y_1|} \qquad (2)$$

Άρα

(i)
$$\begin{aligned}(A\Gamma)(A'\Gamma') &= \frac{\beta^2\cdot\beta^2|x_1^2-\alpha^2|}{\alpha^2 y_1^2} \\ &= \beta^2\frac{|\beta^2x_1^2-\alpha^2\beta^2|}{\alpha^2y_1^2} \\ &= \beta^2\frac{\alpha^2y_1^2}{\alpha^2y_1^2}, \qquad \text{γιατί } \frac{x_1^2}{\alpha^2}-\frac{y_1^2}{\beta^2}=1 \\ &= \beta^2.\end{aligned}$$

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{E\Gamma}\perp\overrightarrow{E\Gamma'}$. Πράγματι έχουμε

$$\overrightarrow{E\Gamma}\cdot\overrightarrow{E\Gamma'}=\left(\alpha-\gamma,\frac{\beta^2(x_1-\alpha)}{\alpha y_1}\right)\cdot\left(-\alpha-\gamma,\frac{\beta^2(x_1+\alpha)}{-\alpha y_1}\right)$$

$$=-(\alpha^2-\gamma^2)-\beta^2\frac{\beta^2(x_1^2-\alpha^2)}{\alpha^2 y_1^2}$$

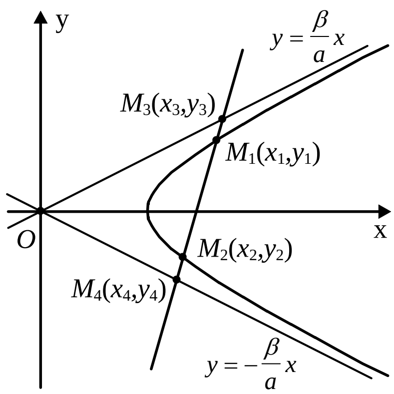
$$=\beta^2-\beta^2\frac{\beta^2x_1^2-\alpha^2\beta^2}{\alpha^2y_1^2}$$

$$=\beta^2-\beta^2\cdot 1=0, \qquad \text{γιατί } \frac{x_1^2}{\alpha^2}-\frac{y_1^2}{\beta^2}=1.$$

Άρα $\overrightarrow{E\Gamma}\perp\overrightarrow{E\Gamma'}$.

3. Αρκεί να δείξουμε ότι τα τμήματα M_1M_2 και M_3M_4 έχουν κοινό μέσο ή, ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_3+x_4}{2} \quad \text{και} \quad \frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_3+y_4}{2} \qquad (1)$$



- Αν η ευθεία M_1M_2 είναι κατακόρυφη τότε, αφού ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της υπερβολής, θα ισχύει το ζητούμενο.

- Αν η ευθεία M_1M_2 δεν είναι κατακόρυφη, τότε θα έχει εξίσωση

$$y=\lambda x+\mu \qquad (2)$$

Έτσι, οι συντεταγμένες των M_1, M_2 θα είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} y=\lambda x+\mu \\ \dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1 \end{cases} \qquad (3)$$

Αν θέσουμε στη δεύτερη εξίσωση όπου y το $\lambda x+\mu$, βρίσκουμε

$$\beta^2x^2-\alpha^2(\lambda x+\mu)^2=\alpha^2\beta^2$$

ή $$\beta^2x^2-\lambda^2\alpha^2x^2-2\lambda\mu\alpha^2x-\mu^2\alpha^2-\alpha^2\beta^2=0$$

ή $$(\beta^2-\lambda^2\alpha^2)x^2-2\lambda\mu\alpha^2x-\alpha^2(\beta^2+\mu^2)=0.$$

Επομένως

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\lambda\mu\alpha^2}{\beta^2-\lambda^2\alpha^2} \qquad (4)$$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες των M_3 και M_4 λύνουμε τα συστήματα

$$\begin{cases} y=\lambda x+\mu \\ y=\dfrac{\beta}{\alpha}x \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} y=\lambda x+\mu \\ y=-\dfrac{\beta}{\alpha}x \end{cases}$$

αντιστοίχως. Από τα συστήματα αυτά βρίσκουμε ότι

$$x_3=\frac{\mu\alpha}{\beta-\lambda\alpha} \quad \text{και} \quad x_4=-\frac{\mu\alpha}{\beta+\lambda\alpha}$$

οπότε έχουμε

$$\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{\mu\alpha}{2(\beta-\lambda\alpha)}-\frac{\mu\alpha}{2(\beta+\lambda\alpha)}=\frac{\lambda\mu\alpha^2}{\beta^2-\lambda^2\alpha^2} \qquad (5)$$

Έτσι, από τις (4) και (5), προκύπτει ότι $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_3+x_4}{2}$.

Εξάλλου έχουμε

$$y_1=\lambda x_1+\mu, \quad y_2=\lambda x_2+\mu, \quad y_3=\lambda x_3+\mu \quad \text{και} \quad y_4=\lambda x_4+\mu .$$

Άρα

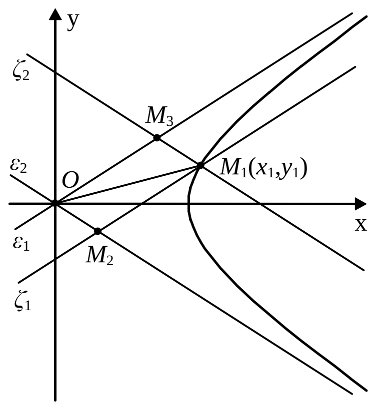
$$\frac{y_1+y_2}{2}=\lambda\frac{x_1+x_2}{2}+\mu=\lambda\frac{x_3+x_4}{2}+\mu=\frac{y_3+y_4}{2} .$$

4. Η παράλληλη ζ_1 προς την ασύμπτωτο $\varepsilon_1: y=\dfrac{\beta}{\alpha}x$ από το σημείο $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$y-y_1=\frac{\beta}{\alpha}(x-x_1), \qquad (1)$$

ενώ η παράλληλη ζ_2 προς την ασύμπτωτο $\varepsilon_2: y=-\dfrac{\beta}{\alpha}x$ από το σημείο $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$y-y_1=-\frac{\beta}{\alpha}(x-x_1). \qquad (2)$$



Έστω M_2 είναι το σημείο τομής της ζ_1 με την ε_2 και M_3 το σημείο τομής της ζ_2 με την ε_1. Τότε

$$(OM_2M_1M_3)=2(OM_1M_2)=|\det(\overrightarrow{OM}_1,\overrightarrow{OM}_2)| \qquad (3)$$

Για να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες του M_2 λύνουμε το σύστημα των

$$\varepsilon_2: y=-\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad \zeta_1: y-y_1=\frac{\beta}{\alpha}(x-x_1)$$

Η δεύτερη εξίσωση, λόγω της πρώτης, γράφεται

$$\begin{aligned}-\frac{\beta}{\alpha}x-y_1=\frac{\beta}{\alpha}x-\frac{\beta}{\alpha}x_1 &\Leftrightarrow -\beta x-\alpha y_1=\beta x-\beta x_1\\ &\Leftrightarrow 2\beta x=\beta x_1-\alpha y_1\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\beta x_1-\alpha y_1}{2\beta}.\end{aligned}$$

Έτσι, από την πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $y=-\frac{\beta x_1-\alpha y_1}{2\alpha}$. Επομένως, οι συντεταγμένες του M_2 είναι

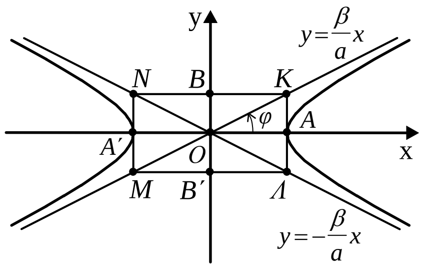
$$x_2=\frac{\beta x_1-\alpha y_1}{2\beta} \quad \text{και} \quad y_2=\frac{\alpha y_1-\beta x_1}{2\alpha}.$$

Άρα, λόγω της (3), έχουμε:

$$\begin{aligned}(OM_2M_1M_3)=\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right|&=\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ \frac{\beta x_1-\alpha y_1}{2\beta} & \frac{\alpha y_1-\beta x_1}{2\alpha}\end{vmatrix}\right|\\ &=\left|\frac{\alpha x_1y_1-\beta x_1^2}{2\alpha}-\frac{\beta x_1y_1-\alpha y_1^2}{2\beta}\right|\\ &=\left|\frac{\alpha\beta x_1y_1-\beta^2x_1^2-\alpha\beta x_1y_1+\alpha^2y_1^2}{2\alpha\beta}\right|\\ &=\left|\frac{\alpha^2y_1^2-\beta^2x_1^2}{2\alpha\beta}\right|\\ &=\left|\frac{-\alpha^2\beta^2}{2\alpha\beta}\right|, \qquad \text{γιατί το } \frac{x_1^2}{\alpha^2}-\frac{y_1^2}{\beta^2}=1\\ &=\frac{1}{2}\alpha\beta.\end{aligned}$$

Άρα, το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου $OM_2M_1M_3$ είναι σταθερό.

5. α΄ τρόπος: Αν $ΚΛΜΝ$ είναι το οθρογώνιο βάσης της υπερβολής, τότε $(ΟΑ)=α$ και $(ΟΚ)=γ$.



Επομένως, αν $φ=Α\hat{O}K$, τότε

$$συνφ=\frac{(ΟΑ)}{(ΟΚ)}=\frac{α}{γ}=\frac{1}{ε} \qquad (1)$$

Άρα

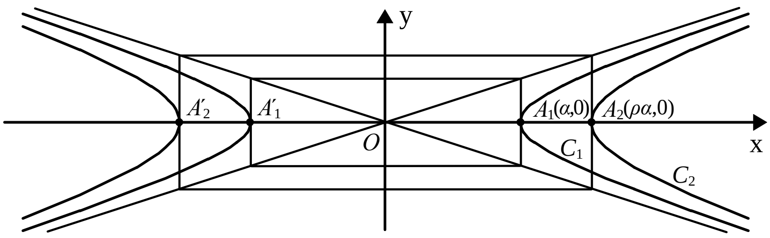
$$\begin{aligned} συν K\hat{O}Λ &= συν2\phi \\ &= 2συν^2φ-1 \\ &= 2\frac{1}{ε^2}-1=\frac{2}{ε^2}-1=\frac{2-ε^2}{ε^2}. \end{aligned}$$

β΄ τρόπος: Οι ασύμπτωτες $ε_1: y=\frac{β}{α}x$ και $ε_2: y=-\frac{β}{α}x$ είναι παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{δ}_1=(α,β)$ και $\vec{δ}_2=(α,-β)$ αντιστοίχως. Επομένως, το συνημίτονο μιας από τις γωνίες των ασυμπτώτων είναι ίσο με το συνημίτονο της γωνίας $φ$ των διανυσμάτων $\vec{δ}_1$, $\vec{δ}_2$, δηλαδή ίσο με

$$συνφ=\frac{\vec{δ}_1\cdot\vec{δ}_2}{|\vec{δ}_1||\vec{δ}_2|}=\frac{α^2-β^2}{\sqrt{α^2+β^2}\sqrt{α^2+β^2}}=\frac{α^2-β^2}{α^2+β^2}$$

$$=\frac{α^2-(γ^2-α^2)}{γ^2}=\frac{2α^2-γ^2}{γ^2}=\frac{2-\left(\frac{γ}{α}\right)^2}{\left(\frac{γ}{α}\right)^2}=\frac{2-ε^2}{ε^2}.$$

6.



Οι συντεταγμένες των A_1 και A_2 είναι $(α,0)$ και $(ρα,0)$ αντιστοίχως

- Για να δείξουμε ότι από το A_2 δεν άγονται εφαπτομένες στη C_1, αρκεί να δείξουμε ότι καμιά από τις εφαπτόμενες της C_1 δεν διέρχεται από το A_2. Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της C_1, τότε η εφαπτομένη της C_1 στο M_1 θα έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \quad (1)$$

Για να δείξουμε ότι η (1) δεν διέρχεται από το $A_2(\rho\alpha, 0)$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{\rho\alpha x_1}{\alpha^2} - \frac{0y_1}{\beta^2} \neq 1 \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad \rho x_1 \neq \alpha .$$

Πράγματι, είναι $|x_1| \geq \alpha$, οπότε $|\rho x_1| \geq \rho\alpha > \alpha$ και άρα $\rho x_1 \neq \alpha$. Επομένως, από το A_2 δεν διέρχεται καμιά εφαπτομένη της υπερβολής C_1.

- Για να δείξουμε ότι από το A_1 άγεται εφαπτομένη στη C_2, αρκεί να βρούμε σημείο $M_2(x_2, y_2)$ της C_2 στο οποίο η εφαπτομένη της C_2 να διέρχεται από το A_1. Η εφαπτομένη της C_2 στο $M_2(x_2, y_2)$ έχει εξίσωση

$$\frac{xx_2}{\alpha^2} - \frac{yy_2}{\beta^2} = \rho^2 \quad (2)$$

Για να περνάει η εφαπτομένη (2) από το $A_1(\alpha, 0)$, αρκεί να ισχύει

$$\frac{\alpha x_2}{\alpha^2} - \frac{0y_2}{\beta^2} = \rho^2 \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad x_2 = \rho^2\alpha . \quad (3)$$

Όμως, $\frac{x_2^2}{\alpha^2} - \frac{y_2^2}{\beta^2} = \rho^2$. Επομένως, λόγω της (3), έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\rho^4\alpha^2}{\alpha^2} - \frac{y_2^2}{\beta^2} = \rho^2 &\Leftrightarrow \rho^4\beta^2 - y_2^2 = \rho^2\beta^2 \\ &\Leftrightarrow y_2^2 = \rho^2\beta^2(\rho^2 - 1) \\ &\Leftrightarrow y_2 = \pm\rho\beta\sqrt{\rho^2 - 1} . \end{aligned}$$

Άρα

$$(x_2, y_2) = (\rho^2\alpha, \rho\beta\sqrt{\rho^2 - 1}) \quad \text{ή} \quad (x_2, y_2) = (\rho^2\alpha, -\rho\beta\sqrt{\rho^2 - 1}) \quad (4)$$

και επομένως από το σημείο $A(\alpha,0)$ άγονται προς την C_2 δύο εφαπτόμενες με εξίσώσεις

$$\frac{x\rho^2\alpha}{\alpha^2}-\frac{y\rho\beta\sqrt{\rho^2-1}}{\beta^2}=\rho^2 \quad \text{και} \quad \frac{x\rho^2\alpha}{\alpha^2}+\frac{y\rho\beta\sqrt{\rho^2-1}}{\beta^2}=\rho^2$$

αντιστοίχως, οι οποίες παίρνουν τη μορφή:

$$\beta\rho^2 x-\alpha\rho\sqrt{\rho^2-1}\,y=\rho^2\alpha\beta \quad \text{και} \quad \beta\rho^2 x+\alpha\rho\sqrt{\rho^2-1}\,y=\rho^2\alpha\beta\ .$$

3.5 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Είναι:

$$y^2-8x+8=0 \Leftrightarrow y^2=8(x-1) \Leftrightarrow y^2=2\cdot 4(x-1)$$

οπότε, αν θέσουμε $X=x-1$ και $Y=y$, έχουμε

$$Y^2=2\cdot 4X\ .$$

Άρα, η εξίσωση παριστάνει παραβολή με κορυφή το σημείο $O'(1,0)$. Η εστία E της παραβολής έχει ως προς το σύστημα $O'XY$ συντεταγμένες $(X,Y)=(2,0)$, οπότε ως προς το σύστημα Oxy θα έχει συντεταγμένες $(x,y)=(3,0)$.

(ii) Είναι:

$$x^2+4x-16y+4=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4=16y \Leftrightarrow (x+2)^2=2\cdot 8y$$

οπότε, αν θέσουμε $X=x+2$ και $Y=y$, έχουμε

$$X^2=2\cdot 8Y\ .$$

Άρα, η εξίσωση παριστάνει παραβολή με κορυφή το σημείο $O'(-2,0)$ και εστία το σημείο $E(-2,4)$.

(iii) Είναι:

$$y^2+4y+8x-28=0 \Leftrightarrow y^2+4y+4=-8x+32 \Leftrightarrow (y+2)^2=-2\cdot 4(x-4)$$

οπότε, αν θέσουμε $X=x-4$ και $Y=y+2$, έχουμε

$$Y^2=2\cdot(-4)X\ .$$

Άρα, η εξίσωση παριστάνει παραβολή με κορυφή το σημείο $O'(4,-2)$ και εστία το σημείο $E(2,-2)$.

(iv) Είναι

$$x^2-8x+6y-8=0 \Leftrightarrow x^2-8x+16=-6y+24 \Leftrightarrow (x-4)^2=2(-3)(y-4)$$

οπότε, αν θέσουμε $X=x-4$ και $Y=y-4$, έχουμε

$$X^2=2\cdot(-3)Y\ .$$

Άρα, η εξίσωση παριστάνει παραβολή με κορυφή το σημείο $O'(4,4)$ και εστία το σημείο $E\left(4,\frac{5}{2}\right)$.

2. (i) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$9x^2+25y^2-36x-189=0$$

$$9(x^2-4x)+25y^2=189$$

$$9(x^2-4x+4)+25y^2=225$$

$$9(x-2)^2+25y^2=225$$

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

οπότε, αν θέσουμε $X=x-2$ και $Y=y$, η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{X^2}{5^2}+\frac{Y^2}{3^2}=1\ .$$

Άρα, η εξίσωση παριστάνει έλλειψη με κέντρο το σημείο $O'(2,0)$ και άξονες συμμετρίας τις ευθείες $x=2$ και $y=0$. Ως προς το σύστημα $O'XY$ οι κορυφές A', A έχουν συντεταγμένες $(X,Y)=(-5,0)$ και $(X,Y)=(5,0)$ αντιστοίχως, ενώ οι εστίες E', E έχουν συντεταγμένες $(X,Y)=(-4,0)$ και $(X,Y)=(4,0)$ αντιστοίχως. Επομένως, ως προς το σύστημα Oxy οι κορυφές A', A έχουν συντεταγμένες $(-3,0)$ και $(7,0)$ αντιστοίχως, ενώ οι εστίες E', E έχουν συντεταγμένες $(-2,0)$ και $(6,0)$ αντιστοίχως.

(ii) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$x^2+4x+16y^2=0$$

$$(x^2+4x+4)+16y^2=4$$

$$(x+2)^2+16\cdot y^2=4$$

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$$

οπότε, αν θέσουμε $X=x+2$ και $Y=y$, η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{X^2}{2^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1.$$

Άρα, η εξίσωση παριστάνει έλλειψη με κέντρο το σημείο $O'(-2,0)$, κορυφές τα σημεία $A'(-4,0)$ και $A(0,0)$ και εστίες τα σημεία $E'\left(-2-\frac{\sqrt{15}}{2},0\right)$ και $E\left(-2+\frac{\sqrt{15}}{2},0\right)$.

(iii) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$4x^2+9y^2-32x-36y+64=0$$

$$4(x^2-8x)+9(y^2-4y)=-64$$

$$4(x^2-2\cdot 4x+16)+9(y^2-2\cdot 2y+4)=-64+64+36$$

$$4(x-4)^2+9(y-2)^2=36$$

$$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

οπότε, αν θέσουμε $X=x-4$ και $Y=y-2$, η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{X^2}{3^2}+\frac{Y^2}{2^2}=1.$$

Άρα, η εξίσωση παριστάνει έλλειψη με κέντρο το σημείο $O'(4,2)$, κορυφές τα σημεία $A'(1,2)$, $A'(7,2)$ και εστίες τα σημεία $E'(4-\sqrt{5},2)$, $E(4+\sqrt{5},2)$.

(iv) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$9x^2+16y^2+54x-32y-47=0$$

$$9(x^2+6x)+16(y^2-2y)=47$$

$$9(x^2+2\cdot 3x+9)+16(y^2-2y+1)=47+81+16$$

$$9(x+3)^2+16(y-1)^2=144$$

$$\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

οπότε, αν θέσουμε $X=x+3$ και $Y=y-1$, η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{X^2}{4^2}+\frac{Y^2}{3^2}=1.$$

Άρα, η εξίσωση παριστάνει έλλειψη με κέντρο το σημείο $O'(-3,1)$, κορυφές τα σημεία $A'(-7,1)$, $A(1,1)$ και εστίες τα σημεία $E'(-3-\sqrt{7},1)$, $E(-3+\sqrt{7},1)$.

3. (i) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$21x^2-4y^2+84x-32y-64=0$$

$$21(x^2-4x)-4(y^2+8y)=64$$

$$21(x^2-2\cdot 2x+4)-4(y^2+2\cdot 4y+16)=64+84-64$$

$$21(x-2)^2-4(y+4)^2=84$$

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+4)^2}{21}=1$$

οπότε, αν θέσουμε $X=x-2$ και $Y=y+4$, παίρνει τη μορφή

$$\frac{X^2}{2^2}-\frac{Y^2}{(\sqrt{21})^2}=1.$$

Άρα, η εξίσωση παριστάνει υπερβολή με κέντρο το σημείο $O'(2,-4)$. Ως προς το σύστημα $O'XY$ οι κορυφές A', A έχουν συντεταγμένες $(X,Y)=(0,-4)$ και $(X,Y)=(4,-4)$ αντιστοίχως, ενώ οι εστίες E', E έχουν συντεταγμένες $(X,Y)=(-5,0)$ και $(X,Y)=(5,0)$ αντιστοίχως. Επομένως, ως προς το σύστημα Oxy οι κορυφές έχουν συντεταγμένες $(-3,-4)$ και $(7,-4)$ αντιστοίχως.

(ii) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά

$$2y^2-3x^2-8y+6x-1=0$$

$$2(y^2-4y)-3(x^2-2x)=1$$

$$2(y^2-2\cdot 2y+4)-3(x^2-2x+1)=1+8-3$$

$$2(y-2)^2-3(x-1)^2=6$$

$$\frac{(y-2)^2}{3}-\frac{(x-1)^2}{2}=1$$

οπότε, αν θέσουμε $X=x-1$ και $Y=y-2$, παίρνει τη μορφή

$$\frac{Y^2}{(\sqrt{3})^2}-\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2}=1.$$

Άρα, η εξίσωση παριστάνει υπερβολή με κέντρο το σημείο $O'(1,2)$, κορυφές τα σημεία $A'(1,2-\sqrt{3})$, $A'(1,2+\sqrt{3})$ και εστίες τα σημεία $E'(1,2-\sqrt{5})$ και $E(1,2+\sqrt{5})$.

4. Η ευθεία $y=x-2$ εφάπτεται της παραβολής $y=x^2-\kappa x+2$, αν και μόνο αν το σύστημα $\begin{cases} y=x-2 \\ y=x^2-\kappa x+2 \end{cases}$ έχει διπλή λύση. Είναι όμως:

$$\begin{cases} y=x-2 \\ y=x^2-\kappa x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x^2-\kappa x+2=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 & (1) \\ x^2-(\kappa+1)x+4=0 & (2) \end{cases}$$

Επομένως, το σύστημα έχει διπλή λύση, αν και μόνο αν η εξίσωση (2) έχει διπλή ρίζα που συμβαίνει, αν και μόνο αν $\Delta=0$. Έχουμε λοιπόν

$$\Delta=0 \Leftrightarrow (\kappa+1)^2-4^2=0 \Leftrightarrow \kappa+1=4 \quad ή \quad \kappa+1=-4$$

$$\Leftrightarrow \kappa=3 \qquad ή \quad \kappa=-5\,.$$

5. Η μοναδική κατακόρυφη εφαπτομένη της παραβολής $y^2=4x$ είναι ο άξονας $y'y$. Ο άξονας, όμως, $y'y$ δεν εφάπτεται του κύκλου $x^2+y^2=\frac{1}{2}$. Επομένως, αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη, ε, του κύκλου και της παραβολής, αυτή θα έχει εξίσωση της μορφής

$$\varepsilon: y=\lambda x+\beta \qquad (1)$$

Η ε εφάπτεται του κύκλου $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, αν και μόνο αν η απόστασή της από το κέντρο $O(0,0)$ του κύκλου είναι ίση με την ακτίνα του, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$\frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad \boldsymbol{2\beta^2=\lambda^2+1}\,. \qquad (2)$$

Η ε εφάπτεται της παραβολής $y^2=4x$, αν και μόνο αν το σύστημα $\begin{cases} y=\lambda x+\beta \\ y^2=4x \end{cases}$ έχει διπλή λύση. Είναι όμως:

$$\begin{cases} y=\lambda x+\beta \\ y^2=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x+\beta \\ (\lambda x+\beta)^2=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x+\beta \\ \lambda^2x^2+2(\lambda\beta-2)x+\beta^2=0 \end{cases} \qquad (3)$$

Επομένως, το σύστημα έχει διπλή λύση, αν και μόνο αν η (3) έχει διπλή λύση που συμβαίνει, αν και μόνο αν

$$\lambda\neq 0 \quad \text{και} \quad \Delta=0$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{cases} \lambda\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\neq 0 \\ 4(\lambda\beta-2)^2-4\lambda^2\beta^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\neq 0 \\ -4\lambda\beta+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta=\frac{1}{\lambda}} \qquad (4)$$

Έτσι, λόγω των (2) και (4), έχουμε

$$\begin{cases} 2\beta^2=\lambda^2+1 \\ \beta=\dfrac{1}{\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\lambda^2}=\lambda^2+1 \\ \beta=\dfrac{1}{\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^4+\lambda^2-2=0 \\ \beta=\dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2=1 \\ \beta=\dfrac{1}{\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ \beta=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \lambda=-1 \\ \beta=-1 \end{cases}.$$

Άρα, υπάρχουν δύο κοινές εφαπτομένες του κύκλου και της παραβολής, οι ευθείες:

$$y=x+1 \quad \text{και} \quad y=-x-1.$$

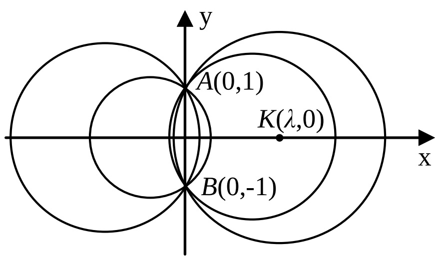
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. (i) Η (1) γράφεται διαδοχικά:

$$(x^2-2\lambda x)+y^2=1$$

$$(x^2-2\lambda x+\lambda^2)+y^2=\lambda^2+1$$

$$(x-\lambda)^2+y^2=(\sqrt{\lambda^2+1})^2$$



Άρα η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(\lambda,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{\lambda^2+1}$.

(ii) Θα θεωρήσουμε δύο από τους παραπάνω κύκλους και αφού βρούμε τα κοινά τους σημεία θα αποδείξουμε ότι κάθε άλλος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) διέρχεται από τα σημεία αυτά. Για $\lambda=0$, $\lambda=1$ έχουμε τους κύκλους:

$$C_0: x^2+y^2-1=0 \quad \text{και} \quad C_1: x^2+y^2-2x-1=0 \qquad (2)$$

αντιστοίχως. Τα σημεία τομής των κύκλων αυτών είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (2). Λύνουμε το σύστημα αυτό ως εξής:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x^2+y^2-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

Άρα, οι κύκλοι C_0 και C_1 τέμνονται στα σημεία $A(0,1)$ και $B(0,-1)$. Από τα σημεία αυτά διέρχονται όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1), αφού οι συντεταγμένες των A και B επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$. Πράγματι

$$0^2+1^2-2\lambda 0-1=0 \quad \text{και} \quad 0^2+(-1)^2-2\lambda 0-1=0.$$

Η εξίσωση της κοινής χορδής είναι η $x=0$.

2. (i) Ο κύκλος $C_1: x^2+y^2=1$ έχει κέντρο το $K_1(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1=1$, ενώ το κύκλος $C_2:(x-2)^2+y^2=2^2$ έχει κέντρο το $K_2(2,0)$ και ακτίνα $\rho_2=2$. Επομένως, αν ε είναι η ευθεία με εξίσωση $y=\lambda x+\beta$, τότε θα έχουμε

$$d(K_1,\varepsilon)=\frac{|\lambda\cdot 0-0+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$$

και (1)

$$d(K_2,\varepsilon)=\frac{|\lambda\cdot 2-0+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{|2\lambda+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$$

(ii) Για να εφάπτεται η ε και στους δύο κύκλους πρέπει να αρκεί

$$d(K_1,\varepsilon)=\rho_1 \quad \text{και} \quad d(K_2,\varepsilon)=\rho_2$$

Όμως:

$$\begin{cases} d(K_1,\varepsilon)=\rho_1 \\ d(K_2,\varepsilon)=\rho_2 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1 \\ \dfrac{|2\lambda+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\beta|=\sqrt{\lambda^2+1} \\ |2\lambda+\beta|=2\sqrt{\lambda^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\beta|=\sqrt{\lambda^2+1} \\ |2\lambda+\beta|=|2\beta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2=\lambda^2+1 \\ 2\lambda+\beta=2\beta \quad \text{ή} \quad 2\lambda+\beta=-2\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2=\lambda^2+1 \\ \beta=2\lambda \quad \text{ή} \quad \beta=-\dfrac{2\lambda}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2=\dfrac{1}{3} \\ \beta=2\lambda \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \dfrac{4\lambda^2}{9}=\lambda^2+1 \quad (\text{αδύνατη}) \\ \beta=-\dfrac{2\lambda}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \beta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \beta = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Άρα, υπάρχουν δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 οι:

$$\varepsilon_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(iii) Οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$. Άρα τέμνονται πάνω στον $x'x$ και, επειδή η ε_1 σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30^0 (αφού $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{εφ}30^0$), οι ευθείες ε_1, ε_2 σχηματίζουν γωνία 60^0.

3. (i) Οι συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) των σημείων *Α* και *Β* είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ y^2 = 4x \end{cases}$. Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος, λόγω της πρώτης, γράφεται

$$(\lambda x + \beta)^2 = 4x \Leftrightarrow \lambda^2 x^2 + 2\lambda\beta x + \beta^2 = 4x$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 x^2 + 2(\lambda\beta - 2)x + \beta^2 = 0 \qquad (1)$$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτεροβάθμια και έχει λύση, αν και μόνο αν $\Delta \geq 0$, δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\lambda\beta \leq 1 \qquad (2)$$

Στην περίπτωση αυτή το μέσο *Μ* θα έχει συντεταγμένες

$$\boldsymbol{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\boldsymbol{2 - \lambda\beta}}{\boldsymbol{\lambda^2}} \qquad (3)$$

και

$$\boldsymbol{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \lambda\frac{x_1 + x_2}{2} + \beta = \frac{2 - \lambda\beta}{\lambda} + \beta = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{\lambda}} \qquad (4)$$

(ii) α) Αν $\lambda = 1$, λόγω των σχέσεων (2), (3) και (4), το σημείο *Μ* έχει συντεταγμένες

$$\begin{cases} x = 2 - \beta, \quad \text{με} \quad \beta \leq 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Άρα, όταν το β μεταβάλλεται, τότε το M διαγράφει την ημιευθεία

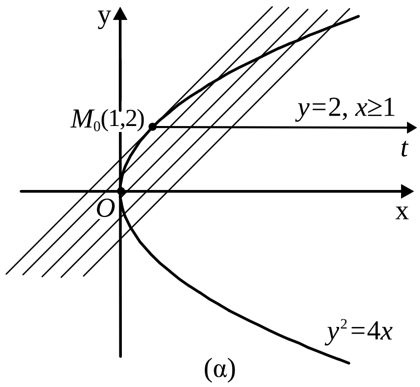
$$M_0t: y=2, \quad \text{με} \quad x\geq 1,$$

όπου M_0 το σημείο με συντεταγμένες (1,2) (Σχ. α).

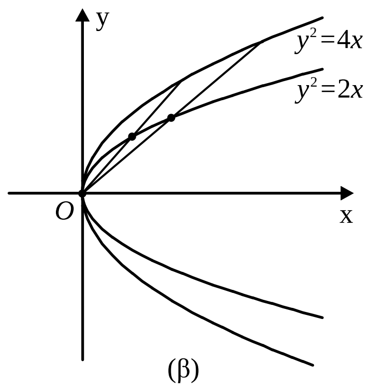
β) Αν β=0, λόγω των σχέσεων (3) και (4), το σημείο M έχει συντεταγμένες:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{\lambda^2} \\ y=\dfrac{2}{\lambda} \end{cases}, \quad \lambda\in\mathbf{R}^*, \quad \text{οπότε} \quad \begin{cases} x=\dfrac{2}{\lambda^2} \\ \lambda=\dfrac{2}{y}, \quad y\neq 0 \end{cases} \quad \text{και άρα} \quad \begin{cases} y^2=2x \\ y\neq 0 \end{cases}.$$

Επομένως, όταν το λ μεταβάλλεται, τότε το σημείο M διαγράφει την παραβολή $y^2=2x$ με εξαίρεση το σημείο O(0,0) (Σχ. β).



(α)



(β)

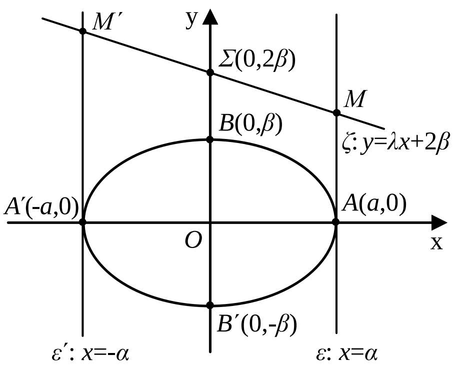
4. Η ευθεία ζ, που διέρχεται από το σημείο $\Sigma(0,2\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, έχει εξίσωση

$$y=\lambda x+2\beta\ .$$

Επομένως τα σημεία M, M' έχουν συντεταγμένες

$(\alpha, \lambda\alpha+2\beta)$ και $(-\alpha, -\lambda\alpha+2\beta)$,

που είναι οι λύσεις των συστημάτων



$$\begin{cases} y=\lambda x+2\beta \\ x=\alpha \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} y=\lambda x+2\beta \\ x=-\alpha \end{cases}$$

αντιστοίχως. Επομένως

(i) Ο κύκλος με διάμετρο MM' έχει κέντρο το $\Sigma(0,2\beta)$ και ακτίνα $\rho=(\Sigma M)=\sqrt{\alpha^2+(\lambda\alpha)^2}=\alpha\sqrt{\lambda^2+1}$. Άρα έχει εξίσωση:

$$x^2+(y-2\beta)^2=\alpha^2(\lambda^2+1) \qquad (1)$$

(ii) Για να διέρχεται ο κύκλος αυτός από τις εστίες της έλλειψης αρκεί οι συντεταγμένες τους να τον επαληθεύουν. Αρκεί, δηλαδή,

$$\gamma^2+(0-2\beta)^2=\alpha^2(\lambda^2+1) \qquad (2)$$

Όμως

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \gamma^2+4\beta^2=\alpha^2\lambda^2+\alpha^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2\lambda^2=\gamma^2-\alpha^2+4\beta^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2\lambda^2=-\beta^2+4\beta^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2\lambda^2=3\beta^2 \\ &\Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Επομένως ο κύκλος διέρχεται από τις εστίες, αν και μόνο αν $\lambda=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{3}$.

5. Για την έλλειψη $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ είναι α=5 και β=4. Επομένως γ=3, οπότε οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$. Άρα, αν $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι η εξίσωση της ζητούμενης υπερβολής, τότε θα ισχύει

$$\alpha^2+\beta^2=3^2=9\,. \qquad (1)$$

Για να εφάπτεται η υπερβολή της ευθείας $y=x+1$ αρκεί το σύστημα

$$\begin{cases} y=x+1 \\ \dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1 \end{cases}$$

να έχει διπλή λύση. Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος, λόγω της πρώτης, γράφεται

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{(x+1)^2}{\beta^2}\Leftrightarrow \beta^2x^2-\alpha^2(x+1)^2=\alpha^2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow (\beta^2-\alpha^2)x^2-2\alpha^2x-\alpha^2(\beta^2+1)=0 \qquad (2)$$

Επομένως, αρκεί η εξίσωση (2) να είναι δευτεροβάθμια με διακρίνουσα $\Delta=0$, δηλαδή αρκεί

$$\beta^2-\alpha^2\neq 0 \quad \text{και} \quad 4\alpha^4+4\alpha^2(\beta^2+1)(\beta^2-\alpha^2)=0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\beta\neq\pm\alpha \quad (2) \quad \text{και} \quad \alpha^2+(\beta^2+1)(\beta^2-\alpha^2)=0 \quad (3)$$

Όμως

$$\alpha^2+(\beta^2+1)(\beta^2-\alpha^2)=0\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^4+\beta^2-\alpha^2\beta^2-\alpha^2=0$$

$$\Leftrightarrow \beta^2+1-\alpha^2=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2=1$$

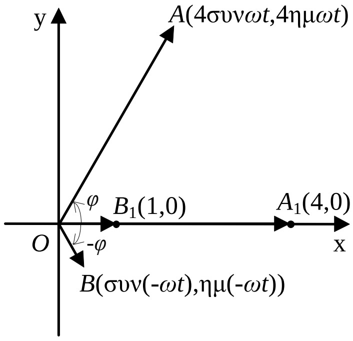
Έτσι, έχουμε

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2=9\\ \alpha^2-\beta^2=1\\ \alpha\neq\pm\beta\end{cases}, \quad \text{οπότε} \quad \begin{cases}\alpha^2=5\\ \beta^2=4\end{cases}$$

Άρα, η υπερβολή έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$$

6. Έστω ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας. Τότε, κατά τη χρονική στιγμή t το διάνυσμα $\overrightarrow{OA_1}$, θα έχει διαγράψει γωνία $\varphi=\omega t$, ενώ το διάνυσμα $\overrightarrow{OB_1}$, θα έχει διαγράψει γωνία $-\varphi=-\omega t$. Επομένως, κατά τη χρονική στιγμή t το διάνυσμα $\overrightarrow{OA_1}$ θα έχει πάρει τη θέση



$$\overrightarrow{OA}=(4\text{συν}\varphi,4\text{ημ}\varphi)=(4\text{συν}\omega t,4\text{ημ}\omega t)\,,$$

ενώ το $\overrightarrow{OB_1}$, θα έχει πάρει τη θέση

$$\overrightarrow{OB}=(\text{συν}(-\varphi),\text{ημ}(-\varphi))=(\text{συν}\omega t,-\text{ημ}\omega t)\,.$$

Έτσι, για τη συνισταμένη $\overrightarrow{OM}$ των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ θα ισχύει

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(4\text{συν}\omega t,4\text{ημ}\omega t)+(\text{συν}\omega t,-\text{ημ}\omega t)$$
$$=(5\text{συν}\omega t,3\text{ημ}\omega t)\,.$$

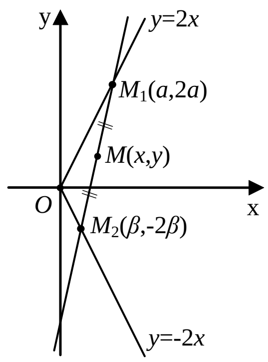
Άρα, το M θα διαγράψει την έλλειψη $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$.

7. (i) Αν $(\alpha,2\alpha)$ και $(\beta,-2\beta)$, $\alpha,\beta>0$, είναι οι συντεταγμένες των M_1 και M_2 αντιστοίχως και (x,y) οι συντεταγμένες του μέσου M, τότε θα ισχύουν

$$\alpha+\beta=2x \quad \text{και} \quad \alpha-\beta=y\,,$$

οπότε θα έχουμε

$$\alpha=\frac{2x+y}{2} \quad \text{και} \quad \beta=\frac{2x-y}{2}\,. \qquad (1)$$



(ii) Το εμβαδόν του τριγώνου OM_1M_2 δίνεται από τον τύπο

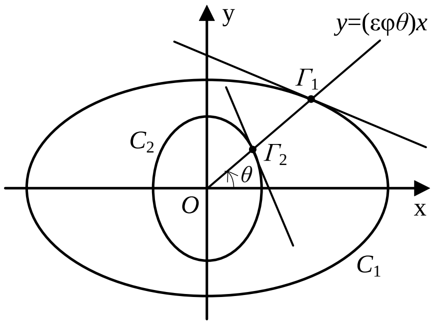
$$(OM_1M_2)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2})|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\alpha & 2\alpha\\ \beta & -2\beta\end{vmatrix}\right|=2\alpha\beta\,.$$

Επομένως

$$(OM_1M_2)=2\Leftrightarrow\alpha\beta=1\Leftrightarrow\frac{2x+y}{2}\cdot\frac{2x-y}{2}=1\Leftrightarrow 4x^2-y^2=4\Leftrightarrow\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}=1\,, \quad (2)$$

που παριστάνει υπερβολή. Όμως $\alpha,\beta>0$, οπότε $x>0$. Άρα το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στο δεξιό κλάδο της υπερβολής (2).

8. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 των C_1 και C_2 στα σημεία Γ_1 και Γ_2 είναι:



$$\varepsilon_1 : \frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1 \qquad (1)$$

και

$$\varepsilon_2 : \alpha^2 xx_2+\beta^2 yy_2=1 \qquad (2)$$

αντιστοίχως. Επομένως οι συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 των ε_1 και ε_2 είναι ίσοι με

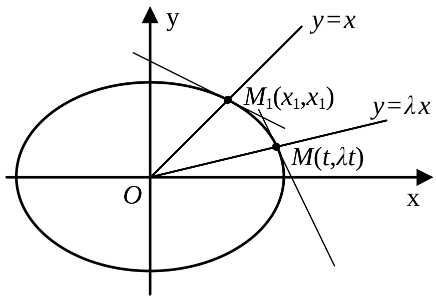
$$\lambda_1=-\frac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1} \quad \text{και} \quad \lambda_2=-\frac{\alpha^2 x_2}{\beta^2 y_2},$$

οπότε θα ισχύει

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{x_1x_2}{y_1y_2}=\frac{x_1x_2}{(\text{εφ}\theta)x_1\cdot(\text{εφ}\theta)x_2}=\frac{1}{\text{εφ}^2\theta}$$

αφού $y_1=(\text{εφ}\theta)x_1$ και $y_2=(\text{εφ}\theta)x_2$.

9. (i) Η διχοτόμος $y=x$, $x>0$ της γωνίας $x\hat{O}y$ τέμνει την έλλειψη στο σημείο $M_1(x_1,x_1)$ με $x_1=\dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.



Επομένως, η εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης στο σημείο $M_1(x_1,x_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yx_1}{\beta^2}=1$$

και άρα συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$. Επειδή $\lambda_1=-\dfrac{1}{2}$, έχουμε

$$\lambda_1=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{\beta^2}{\alpha^2}=-\frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \alpha^2=2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 2(\alpha^2 - \gamma^2) \Leftrightarrow 2\gamma^2 = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ii) Αν $(t, \lambda t)$ είναι οι συντεταγμένες του M, τότε η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο αυτό έχει εξίσωση

$$\frac{xt}{\alpha^2} + \frac{y\lambda t}{\beta^2} = 1$$

και άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\mu = -\frac{\beta^2}{\lambda\alpha^2}$. Όμως $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$. Επομένως,

$$\mu = \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\lambda\alpha^2} = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{\lambda}(\varepsilon^2 - 1) = \frac{1}{\lambda}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1\right) = -\frac{1}{2\lambda},$$

οπότε $\lambda\mu = -\frac{1}{2}$.

10. (i) Έστω M το κέντρο και r η ακτίνα ενός από τους παραπάνω κύκλους C. Τότε θα έχουμε:

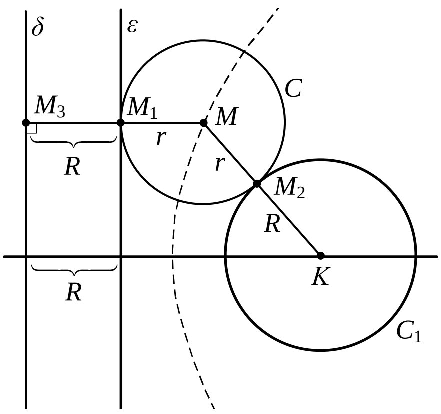
$$d(M, K) = R + r \qquad (1)$$

και

$$d(M, \varepsilon) = r.$$

Επομένως, θα ισχύει

$$d(M, K) = d(M, \varepsilon) + R.$$



Αν, τώρα, στο ημιεπίπεδο, ως προς ε, που δεν ανήκει το K φέρουμε ευθεία δ παράλληλη προς την ε και σε απόσταση R μονάδων, τότε θα ισχύει

$$d(M, \delta) = R + r \overset{(1)}{=} d(M, K).$$

Άρα, το κέντρο M του κύκλου C θα ανήκει στην παραβολή που έχει εστία το K και διευθετούσα τη δ.

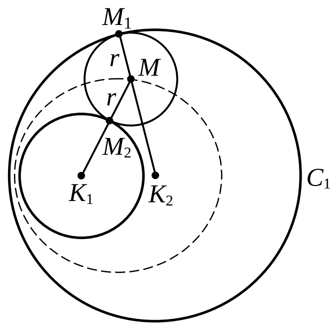
(ii) Έστω M το κέντρο και r η ακτίνα ενός από τους παραπάνω κύκλους C. Τότε θα έχουμε:

$$d(M,K_1)=R_1-r$$

και

$$d(M,K_2)=R_2+r\ .$$

Επομένως, θα ισχύει



$$d(M,K_1)+d(M,K_2)=R_1+R_2 \quad \text{(σταθερό).}$$

Άρα, το κέντρο M του κύκλου C θα ανήκει στην έλλειψη με εστίες τα σημεία K_1 και K_2 και σταθερό άθροισμα $2\alpha=R_1+R_2$.

(iii) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $R_1>R_2$. Έστω M το κέντρο και r η ακτίνα ενός από τους παραπάνω κύκλους C. Τότε θα έχουμε:

$$d(M,K_1)=R_1+r$$

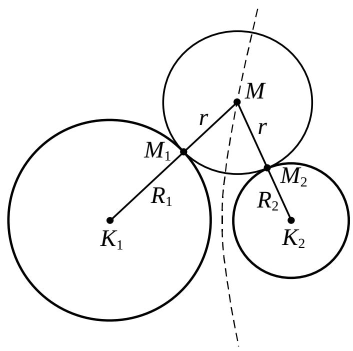
και

$$d(M,K_2)=R_2+r$$

οπότε

$$d(M,K_1)-d(M,K_2)=R_1-R_2>0$$
(σταθερό).

Άρα, το κέντρο M του κύκλου C θα ανήκει στο δεξιό κλάδο της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'=K_1$ και $E=K_2$ και σταθερή διαφορά $2\alpha=R_1-R_2>0$.



11. (i) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο με συντεταγμένες $(x_1,y_1)=(\alpha\text{συν}\varphi,\beta\text{ημ}\varphi)$ είναι η

$$\frac{x\alpha\text{συν}\varphi}{\alpha^2}+\frac{y\beta\text{ημ}\varphi}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow (\beta\text{συν}\varphi)x+(\alpha\text{ημ}\varphi)y-\alpha\beta=0 \qquad (1)$$

(ii) Λόγω της (1) έχουμε:

$$d(E,\varepsilon)\cdot d(E',\varepsilon)=\frac{|\beta\gamma\text{συν}\varphi-\alpha\beta|}{\sqrt{\beta^2\text{συν}^2\varphi+\alpha^2\text{ημ}^2\varphi}}\cdot\frac{|-\beta\gamma\text{συν}\varphi-\alpha\beta|}{\sqrt{\beta^2\text{συν}^2\varphi+\alpha^2\text{ημ}^2\varphi}}$$

$$=\frac{|\alpha^2\beta^2-\beta^2\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi|}{\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2\eta\mu^2\varphi}$$

$$=\frac{\beta^2|\alpha^2-\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi|}{(\alpha^2-\gamma^2)\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\alpha^2\eta\mu^2\varphi}$$

$$=\beta^2\frac{|\alpha^2-\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi|}{\alpha^2(\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\eta\mu^2\varphi)-\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

$$=\beta^2\frac{|\alpha^2-\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi|}{\alpha^2-\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

$$=\beta^2.$$

(iii) Η εφαπτομένη (1) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A\left(\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\varphi},0\right)$ και $B\left(0,\frac{\beta}{\eta\mu\varphi}\right)$, εφόσον βέβαια είναι $\eta\mu\varphi\neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi\neq 0$, που συμβαίνει όταν το M δεν συμπίπτει με μια από τις κορυφές A, A', B, B' της έλλειψης. Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με

$$(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\left|\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\right|\cdot\left|\frac{\beta}{\eta\mu\varphi}\right|=\frac{\alpha\beta}{|\eta\mu 2\varphi|}.$$

Επομένως, το εμβαδόν ελαχιστοποιείται, αν και μόνο αν $|\eta\mu 2\varphi|=1$ που συμβαίνει, αν και μόνο αν $2\varphi=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, ή, ισοδύναμα, $\kappa=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbf{Z}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Έστω $P(\nu)$ η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Η $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=1$, αφού γράφεται $1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, που είναι αληθής.

- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και η $P(\nu+1)$ θα είναι αληθής, δηλαδή ότι:

Αν $1^2+2^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$ (1), τότε

$$1^2+2^2+\ldots+\nu^2+(\nu+1)^2=\frac{(\nu+1)(\nu+2)(2\nu+3)}{6}.$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\ldots+\nu^2+(\nu+1)^2 &\overset{(1)}{=} \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+(\nu+1)^2\\ &=\frac{(\nu+1)[\nu(2\nu+1)+6(\nu+1)]}{6}\\ &=\frac{(\nu+1)(2\nu^2+7\nu+6)}{6}\\ &=\frac{(\nu+1)(\nu+2)(2\nu+3)}{6}.\end{aligned}$$

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο ν.

(ii) Έστω $P(\nu)$ η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Η $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=1$, αφού γράφεται $1^3=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$, που είναι αληθής.

- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και η $P(\nu+1)$ θα είναι αληθής, δηλαδή ότι:

Αν $\quad 1^3+2^3+...+\nu^3=\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2 \quad (1), \quad$ τότε

$$1^3+2^3+...+\nu^3+(\nu+1)^3=\left(\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}\right)^2.$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}1^3+2^3+...+\nu^3+(\nu+1)^3 &\overset{(1)}{=} \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}+(\nu+1)^3\\ &=\frac{(\nu+1)^2(\nu^2+4(\nu+1))}{4}\\ &=\frac{(\nu+1)^2(\nu^2+4\nu+4)}{4}\\ &=\frac{(\nu+1)^2(\nu+2)^2}{4}\\ &=\left(\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο ν.

(iii) Έστω $P(\nu)$ η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε

- Η $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=1$, αφού γράφεται $1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$, που είναι αληθής.

- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και η $P(\nu+1)$ θα είναι αληθής, δηλαδή ότι:

Αν $\quad 1\cdot 2+2\cdot 3+...+\nu(\nu+1)=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3} \quad (1), \quad$ τότε

$$1\cdot 2+2\cdot 3+...+\nu(\nu+1)+(\nu+1)(\nu+2)=\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{3}.$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}1\cdot 2+2\cdot 3+...+\nu(\nu+1)+(\nu+1)(\nu+2) &\overset{(1)}{=} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}+(\nu+1)(\nu+2)\\ &=\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{3}.\end{aligned}$$

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο ν.

(iv) Έστω $P(\nu)$ η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε

- Η $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=1$, αφού γράφεται $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$, που είναι αληθής.
- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και η $P(\nu+1)$ θα είναι αληθής, δηλαδή ότι:

Αν $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{\nu}{\nu+1}$ (1), τότε

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{\nu(\nu+1)}+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}=\frac{\nu+1}{\nu+2}.$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{\nu(\nu+1)}+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}&\overset{(1)}{=}\frac{\nu}{\nu+1}+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}\\&=\frac{\nu(\nu+2)+1}{(\nu+1)(\nu+2)}\\&=\frac{(\nu+1)^2}{(\nu+1)(\nu+2)}\\&=\frac{\nu+1}{\nu+2}.\end{aligned}$$

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο ν.

2. Έστω $P(\nu)$ η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε

- Η $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=1$, αφού γράφεται $1=\frac{x-1}{x-1}$, που είναι αληθής.
- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και η $P(\nu+1)$ θα είναι αληθής, δηλαδή ότι:

Αν $1+x+x^2+...+x^{\nu-1}=\frac{x^\nu-1}{x-1}$ (1), τότε $1+x+x^2+...+x^{\nu-1}+x^\nu=\frac{x^{\nu+1}-1}{x-1}$.

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}1+x+x^2+...+x^{\nu-1}+x^\nu&\overset{(1)}{=}\frac{x^\nu-1}{x-1}+x^\nu\\&=\frac{x^\nu-1+x^{\nu+1}-x^\nu}{x-1}\\&=\frac{x^{\nu+1}-1}{x-1}.\end{aligned}$$

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο ν.

ΣΧΟΛΙΟ Η ισότητα $P(\nu)$ είναι γνωστή από τη θεωρία πολυωνύμων, αφού το πολυώνυμο $x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+...+x+1$ είναι το πηλίκο της τέλειας διαίρεσης του $x^{\nu}-1$ με το $x-1$.

3. (i) Έστω $P(\nu)$ η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε

- Η $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=3$, αφού γράφεται $3^2>2\cdot 3+1$ που είναι αληθής.

- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και η $P(\nu+1)$ θα είναι αληθής, δηλαδή ότι:

$$\text{Αν} \quad \nu^2>2\nu+1 \quad (1), \quad \text{τότε} \quad (\nu+1)^2>2(\nu+1)+1\,.$$

Πράγματι, έχουμε:

$$(\nu+1)^2=\nu^2+2\nu+1\overset{(1)}{>}2\nu+1+2\nu+1=4\nu+2$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $4\nu+2>2(\nu+1)+1$. Έχουμε:

$$4\nu+2>2(\nu+1)+1 \Leftrightarrow 4\nu+2>2\nu+3 \Leftrightarrow 2\nu>1 \Leftrightarrow \nu>\frac{1}{2},$$

που ισχύει.

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο $\nu\geq 3$.

(ii) Έστω $P(\nu)$ η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε

- Η $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=7$, αφού γράφεται $\left(\frac{4}{3}\right)^7>7$, που είναι αληθής.

- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και η $P(\nu+1)$ θα είναι αληθής, δηλαδή ότι:

$$\text{Αν} \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu}>\nu \quad (1), \quad \text{τότε} \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu+1}>(\nu+1)\,.$$

Πράγματι, έχουμε:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\nu+1}=\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\nu}\overset{(1)}{>}\frac{4}{3}\cdot\nu\,.$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{4}{3}\nu>\nu+1$. Έχουμε:

$$\frac{4}{3}\nu>\nu+1 \Leftrightarrow 4\nu>3\nu+3 \Leftrightarrow \nu>3,$$

που ισχύει γιατί $\nu \geq 7$.

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 7$.

(iii) Έστω $P(\nu)$ η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε

- Η $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=1$, αφού γράφεται $5^1>5-1$, που είναι αληθής.

- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και η $P(\nu+1)$ θα είναι αληθής, δηλαδή ότι:

$$\text{Αν} \quad 5^\nu>5\nu-1 \quad (1), \quad \text{τότε} \quad 5^{\nu+1}>5(\nu+1)-1 .$$

Πράγματι, έχουμε:

$$5^{\nu+1}=5 \cdot 5^\nu \overset{(1)}{>} 5(5\nu-1)=25\nu-5 .$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $25\nu-5>5(\nu+1)-1$. Έχουμε:

$$25\nu-5>5(\nu+1)-1 \Leftrightarrow 25\nu-5>5\nu+4 \Leftrightarrow \nu>\frac{9}{20},$$

που ισχύει..

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο ν .

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω $P(\nu)$ η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε

- Η $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=4$, αφού γράφεται $4!>2^4$ ή, ισοδύναμα, $24>16$, που είναι αληθής.

- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και η $P(\nu+1)$ θα είναι αληθής, δηλαδή ότι, αν $\nu!>2^\nu$ τότε και $(\nu+1)!>2^{\nu+1}$. Πράγματι έχουμε διαδοχικά:

$$\nu!>2^\nu$$

$$(\nu+1) \cdot \nu!>(\nu+1)2^\nu$$

$$(\nu+1)!>(\nu+1) \cdot 2^\nu$$

$$(\nu+1)!>2\cdot 2^{\nu}, \qquad \text{αφού} \quad \nu+1>2 \text{ γιατί } \nu\geq 4$$

$$(\nu+1)!>2^{\nu+1}.$$

Επομένως, η ανισότητα αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο $\nu\geq 4$.

2. Έστω $P(\nu)$ η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε

- Η $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=1$, αφού γράφεται $\frac{1}{1^2}\leq 2-\frac{1}{1}$, που είναι αληθής.

- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και η $P(\nu+1)$ θα είναι αληθής, δηλαδή ότι:

Αν $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2}\leq 2-\frac{1}{\nu}$ (1), τότε

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{(\nu+1)^2}\leq 2-\frac{1}{\nu+1}.$$

Πράγματι, αν και στα δύο μέλη της (1) προσθέσουμε το $\frac{1}{(\nu+1)^2}$, έχουμε

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{(\nu+1)^2}\leq 2-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{(\nu+1)^2}.$$

Επομένως, αν δείξουμε ότι

$$2-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{(\nu+1)^2}\leq 2-\frac{1}{\nu+1},$$

τότε θα ισχύει το ζητούμενο. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
2-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{(\nu+1)^2}\leq 2-\frac{1}{(\nu+1)} &\Leftrightarrow -\frac{1}{\nu}+\frac{1}{(\nu+1)^2}\leq -\frac{1}{(\nu+1)}\\
&\Leftrightarrow -(\nu+1)^2+\nu\leq -\nu(\nu+1)\\
&\Leftrightarrow 0\leq -\nu(\nu+1)+(\nu+1)^2-\nu\\
&\Leftrightarrow 0\leq -\nu^2-\nu+\nu^2+2\nu+1-\nu\\
&\Leftrightarrow 0\leq 1, \qquad \text{που ισχύει..}
\end{aligned}$$

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει για όλους τους θετικούς ακέραιους ν.

3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu}<\nu$ για κάθε $\nu\geq 3$ ή, ισοδύναμα, ότι

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}<\nu \quad \text{για κάθε } \nu\geq 3.$$

Έστω $P(\nu)$ η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε

- Η ανισότητα $P(\nu)$ αληθεύει για $\nu=3$, αφού γίνεται $\left(\frac{4}{3}\right)^{3}<3$ ή, ισοδύναμα, $64<81$, που είναι αληθής.

- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και η $P(\nu+1)$ θα είναι αληθής, δηλαδή ότι:

$$\text{Αν } \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}<\nu \quad (1), \quad \text{τότε } \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}<\nu+1.$$

Πράγματι, επειδή $1<1+\frac{1}{\nu+1}<1+\frac{1}{\nu}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}<\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}&=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\\ &<\nu\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right) \qquad \text{(λόγω της (1))}\\ &=\nu+1.\end{aligned}$$

Άρα, η $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο $\nu\geq 3$.

4.2 ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Είναι: $83=7\cdot 11+6$
Άρα το πηλίκο είναι 7 και το υπόλοιπο 6.

(ii) Είναι: $-83=(-7)11-6=(-8)11+5$
Άρα το πηλίκο είναι -8 και το υπόλοιπο 5.

(iii) Είναι: $83=(-7)(-11)+6$

Άρα το πηλίκο είναι -7 και το υπόλοιπο 6.

(iv) Είναι: $-83=7\cdot(-11)-6=8(-11)+5$

Άρα το πηλίκο είναι 8 και το υπόλοιπο 5.

2. (i) Κάθε ακέραιος α, σύμφωνα με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης, παίρνει μια από τις παρακάτω μορφές

$$\alpha=3\lambda \quad \text{ή} \quad \alpha=3\lambda+1 \quad \text{ή} \quad \alpha=3\lambda+2\ ,\quad \lambda\in\mathbf{Z}\,.$$

- Αν $\alpha=3\lambda$, τότε

$$\alpha^2=9\lambda^2=3\cdot 3\lambda^2=3\kappa\text{, όπου } \kappa=3\lambda^2\in\mathbf{Z}\,.$$

- Αν $\alpha=3\lambda+1$, τότε

$$\alpha^2=9\lambda^2+6\lambda+1=3(3\lambda^2+2\lambda)+1=3\kappa+1,\quad \text{όπου}\quad \kappa=3\lambda^2+2\lambda\in\mathbf{Z}\,.$$

- Αν $\alpha=3\lambda+2$, τότε

$$\alpha^2=9\lambda^2+12\lambda+4=9\lambda^2+12\lambda+3+1=3(3\lambda^2+4\lambda+1)+1=3\kappa+1,$$

όπου $\kappa=3\lambda^2+4\lambda+1\in\mathbf{Z}$.

(ii) Έχουμε $\alpha=6\kappa+5=6\kappa+3+2=3(2\kappa+1)+2=3\lambda+2$, όπου $\lambda=2\kappa+1\in\mathbf{Z}$. Το αντίστροφο δεν ισχύει, αφού οι αριθμοί της μορφής $3\lambda+2$, με $\lambda=2\kappa$ παίρνουν τη μορφή $6\kappa+2$ και όχι τη μορφή $6\kappa+5$. Για παράδειγμα, ο αριθμός 8, που είναι της μορφής $3\lambda+2$ με $\lambda=2$, δεν παίρνει τη μορφή $6\kappa+5$, αφού $8=6\kappa+2$ με $\kappa=1$.

3. Επειδή ο α είναι περιττός θα είναι της μορφής $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Έτσι θα έχουμε:

$$\frac{\alpha^2+(\alpha+2)^2+(\alpha+4)^2+1}{12}=\frac{(2\kappa+1)^2+(2\kappa+3)^2+(2\kappa+5)^2+1}{12}=\frac{12\kappa^2+36\kappa+36}{12}$$

$$=\kappa^2+3\kappa+3\in\mathbf{Z}\,.$$

4. Επειδή το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος αριθμός, το άθροισμα άρτιου πλήθους περιττών αριθμών θα είναι άρτιος αριθμός. Όμως, οι αριθμοί 1,3 και 5 είναι περιττοί. Άρα το άθροισμα δέκα προσθετέων, καθένας από τους οποίους είναι ίσος με 1 ή 3 ή 5, θα είναι άρτιος αριθμός και συνεπώς δε μπορεί να είναι ίσος με τον 25.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του 660 με τον β, τότε θα ισχύει

$$660=17\beta+\upsilon\ , \ \text{ με } \ 0\leq\upsilon<\beta\ ,$$

οπότε

$$\upsilon=660-17\beta \quad \text{και} \quad 0\leq\upsilon<\beta \qquad (1)$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} 0\leq 660-17\beta<\beta &\Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq 660-17\beta \\ 660-17\beta<\beta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 17\beta\leq 660 \\ 660<18\beta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{660}{18}<\beta\leq\frac{660}{17} \\ &\Leftrightarrow 36+\frac{12}{18}<\beta\leq 38+\frac{14}{17} \\ &\Leftrightarrow \beta=37 \ \text{ ή } \ \beta=38\,. \end{aligned}$$

- Αν $\beta=37$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε ότι $\upsilon=31$, ενώ
- Αν $\beta=38$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε ότι $\upsilon=14$.

2. Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα, την $x=\rho$. Τότε θα ισχύει

$$\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0 \qquad (1)$$

Αν ο ρ είναι *άρτιος*, τότε και ο ρ^2 θα είναι άρτιος, οπότε ο $\alpha\rho^2+\beta\rho$ θα είναι άρτιος. Άρα, ο $\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma$ θα είναι περιττός, αφού το γ είναι περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο, λόγω της (1).

Αν ο ρ είναι *περιττός*, τότε και ο ρ^2 θα είναι περιττός, και, επειδή οι α, β είναι περιττοί, οι $\alpha\rho^2$ και $\beta\rho$ θα είναι περιττοί. Άρα ο $\alpha\rho^2+\beta\rho$ θα είναι άρτιος, οπότε ο $\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma$ θα είναι περιττός, αφού ο γ είναι περιττός. Αυτό, όμως, είναι άτοπο λόγω της (1).

3. Σύμφωνα με την εφαρμογή 2, οι α^2 και β^2 θα είναι της μορφής

$$\alpha^2 = 8\lambda + 1,\ \ \lambda \in \mathbf{Z} \quad \text{και} \quad \beta^2 = 8\mu + 1,\ \ \mu \in \mathbf{N} \qquad (1)$$

Επομένως

(i) $$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{8} = \frac{(8\lambda+1)-(8\mu+1)}{8} = \frac{8\lambda - 8\mu}{8} = (\lambda - \mu) \in \mathbf{Z}$$

(ii) $$\frac{\alpha^4 + \beta^4 - 2}{16} = \frac{(8\lambda+1)^2 + (8\mu+1)^2 - 2}{16} =$$

$$= \frac{64\lambda^2 + 64\mu^2 + 16\lambda + 16\mu}{16} = (4\lambda^2 + 4\mu^2 + \lambda + \mu) \in \mathbf{Z}\ .$$

4. Αν $\kappa = 5\lambda + \upsilon$, $\upsilon = 0,1,2,3,4$ είναι η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του κ με τον 5, τότε θα ισχύει

$$\frac{3\kappa+4}{5} = \frac{3(5\lambda+\upsilon)+4}{5} = \frac{15\cdot\lambda + 3\upsilon + 4}{5} = 3\lambda + \frac{3\upsilon+4}{5}\ .$$

Επομένως, ο $\frac{3\kappa+4}{5}$ είναι ακέραιος, αν και μόνο αν ο $\frac{3\upsilon+4}{5}$ είναι ακέραιος. Διακρίνουμε, λοιπόν, πέντε περιπτώσεις:

— Αν $\upsilon = 0$, τότε $\frac{3\upsilon+4}{5} = \frac{4}{5} \notin \mathbf{Z}$

— Αν $\upsilon = 1$, τότε $\frac{3\upsilon+4}{5} = \frac{7}{5} \notin \mathbf{Z}$

— Αν $\upsilon = 2$, τότε $\frac{3\upsilon+4}{5} = 2 \in \mathbf{Z}$

— Αν $\upsilon = 3$, τότε $\frac{3\upsilon+4}{5} = \frac{13}{5} \notin \mathbf{Z}$

— Αν $\upsilon = 4$, τότε $\frac{3\upsilon+4}{5} = \frac{16}{5} \notin \mathbf{Z}$.

Άρα, ο $\frac{3\kappa+4}{5}$ είναι ακέραιος, αν και μόνο αν $\upsilon = 2$, δηλαδή, αν και μόνο αν ο κ είναι της μορφής $\kappa = 5\lambda + 2$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

5. (i) Αν ο α είναι *άρτιος*, τότε θα είναι της μορφής $\alpha=2\kappa$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, οπότε θα ισχύει $\alpha^2=(2\kappa)^2=4\kappa^2=4\lambda$, όπου $\lambda=\kappa^2\in\mathbf{Z}$.

Αν ο α είναι *περιττός*, τότε θα είναι της μορφής $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, οπότε θα ισχύει $\alpha^2=(2\kappa+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1=4(\kappa^2+\kappa)+1=4\lambda+1$, όπου $\lambda=(\kappa^2+\kappa)\in\mathbf{Z}$.

(ii) Επειδή οι α, β είναι περιττοί ακέραιοι, τα τετράγωνά τους θα είναι της μορφής

$$\alpha^2=4\lambda+1,\ \lambda\in\mathbf{Z} \quad \text{και} \quad \beta^2=4\mu+1,\ \mu\in\mathbf{Z}.$$

Επομένως, θα ισχύει $\alpha^2+\beta^2=4(\lambda+\mu)+2$, δηλαδή ο $\alpha^2+\beta^2$ θα είναι της μορφής

$$\alpha^2+\beta^2=4\rho+2,\ \ \rho\in\mathbf{Z} \qquad (1)$$

Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση $x^2=\alpha^2+\beta^2$ έχει ακέραια ρίζα γ, τότε θα ισχύει $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$. Έτσι, λόγω της (1), το τετράγωνο του γ θα είναι της μορφής $\gamma^2=4\rho+2$, που είναι άτοπο, σύμφωνα με το ερώτημα (i).

(iii) Καθένας από τους αριθμούς αυτούς είναι της μορφής

$$4\lambda+2,\ \ \lambda\in\mathbf{Z}$$

οπότε, σύμφωνα με το ερώτημα (i), δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.

4.3 ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Είναι ίσο με το πηλίκο της ευκλείδειας διαίρεσης του 1000 με τον 5, δηλαδή ίσο με 200.

(ii) Είναι ίσο με το πηλίκο της ευκλείδειας διαίρεσης του 1000 με τον 25, δηλαδή ίσο με 40.

(iii) Είναι ίσο με το πηλίκο της ευκλείδειας διαίρεσης του 1000 με τον 125, δηλαδή ίσο με 8.

(iv) Είναι ίσο με το πηλίκο της ευκλείδειας διαίρεσης του 1000 με τον 625, δηλαδή ίσο με 1.

2. Επειδή $\alpha|\beta$ και $\gamma|\delta$, θα υπάρχουν ακέραιοι *κ*, *λ* τέτοιοι ώστε $\beta=\kappa\alpha$ και $\delta=\lambda\gamma$. Άρα $\beta\delta=(\kappa\lambda)(\alpha\gamma)$, οπότε $\alpha\gamma|\beta\delta$.

3. Επειδή $11|(\alpha+2)$ και $11|(35-\beta)$, θα υπάρχουν ακέραιοι *κ*, *λ* τέτοιοι ώστε

$$\alpha+2=11\kappa \quad \text{και} \quad 35-\beta=11\lambda .$$

Έτσι θα έχουμε $\alpha=11\kappa-2$ και $\beta=35-11\lambda$, οπότε θα είναι

$$\alpha+\beta=11\kappa-11\lambda+33=11(\kappa-\lambda+3)$$

Άρα $11|(\alpha+\beta)$.

4. Έστω *α*, *β* δύο ακέραιοι με $\alpha-\beta=2\kappa$, $\kappa\in\mathbf{Z}$ (άρτιος). Τότε θα ισχύει $\alpha=\beta+2\kappa$, οπότε θα είναι

$$\alpha^2-\beta^2=(\beta+2\kappa)^2-\beta^2=\beta^2+4\kappa\beta+4\kappa^2-\beta^2=4(\kappa\beta+\kappa^2)=\text{πολ}4 .$$

5. Ας υποθέσουμε ότι $m|(\alpha+1)$. Επειδή $m|\alpha$, θα ισχύει $m|[(\alpha+1)-\alpha]$, δηλαδή $m|1$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού $m>1$.

6. Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

(α) *Δύο τουλάχιστον από τους α,β,γ, είναι άρτιοι*, έστω, για παράδειγμα, οι *α* και *β*. Τότε η διαφορά $\alpha-\beta$ θα είναι άρτιος, οπότε το γινόμενο $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ θα διαιρείται με το 2.

(β) *Δύο τουλάχιστον από τους α,β,γ είναι περιττοί*, έστω, για παράδειγμα, οι *α* και *β*. Τότε η διαφορά $\alpha-\beta$ θα είναι άρτιος, οπότε το γινόμενο $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ θα διαιρείται με τον 2.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Επειδή ο *α* είναι περιττός θα είναι της μορφής $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Έτσι, θα έχουμε

$$\alpha^2=(2\kappa+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1=4(\kappa^2+\kappa)+1=4\lambda+1, \text{ όπου } \lambda=(\kappa^2+\kappa)\in\mathbf{Z}$$

(ii) Επειδή ο *α* είναι περιττός, λόγω της (i), έχουμε

$$(\alpha^2+3)(\alpha^2+7)=(4\lambda+4)(4\lambda+8)=16\underbrace{(\lambda+1)(\lambda+2)}_{2\mu}=32\mu=\text{πολ}32\,,$$

αφού το γινόμενο $(\lambda+1)(\lambda+2)$ είναι άρτιος αριθμός, ως γινόμενο δύο διαδοχικών ακέραιων.

2. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $\alpha=2\kappa$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Τότε
$$\alpha^2+2=4\kappa^2+2=4\lambda+2\neq\text{πολ}4\,,\quad \text{όπου}\quad \lambda=\kappa^2$$

- $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Τότε
$$\alpha^2+2=(2\kappa+1)^2+2=4\kappa^2+4\kappa+1+2=4\underbrace{(\kappa^2+\kappa)}_{\lambda}+3=4\lambda+3\neq\text{πολ}4\,.$$

3. Έστω ότι οι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι α και $\alpha+1$ είναι τετράγωνα ακεραίων. Τότε θα ισχύει

$$\alpha=\kappa^2 \quad \text{και} \quad (\alpha+1)=\lambda^2\,,\quad \text{για κάποιους } \kappa,\lambda\in\mathbf{N}^*\,.$$

Επομένως, θα είναι $\alpha+1=\kappa^2+1$ και έτσι θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\kappa^2+1=\lambda^2 &\Leftrightarrow \lambda^2-\kappa^2=1\\ &\Leftrightarrow (\lambda-\kappa)(\lambda+\kappa)=1\\ &\Leftrightarrow \lambda-\kappa=1 \quad \text{και} \quad \lambda+\kappa=1\\ &\Leftrightarrow \lambda=1 \text{ και } \kappa=0\,, \text{ που είναι άτοπο.}\end{aligned}$$

4. Επειδή $\beta|\alpha$ και οι α,β είναι θετικοί, θα υπάρχει θετικός ακέραιος ν, τέτοιος ώστε $\alpha=\nu\beta$, οπότε θα έχουμε

$$2^\alpha-1=2^{\nu\beta}-1=(2^\beta)^\nu-1=(2^\beta-1)[\underbrace{(2^\beta)^{\nu-1}+(2^\beta)^{\nu-2}+\ldots+(2^\beta)+1}_{\lambda\in\mathbf{Z}}]=\text{πολ}(2^\beta-1)\,.$$

5. (i) Έστω $\alpha-1$, α, $\alpha+1$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι. Θα δείξουμε ότι $6|(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)$ ή, ισοδύναμα, ότι

$$6|\alpha^3-\alpha\,. \tag{1}$$

Αν $\alpha=6\kappa+\upsilon$, $\upsilon=0,1,2,3,4,5$ είναι η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον 6, τότε θα έχουμε

$$\alpha^3-\alpha=(6\kappa+\upsilon)^3-(6\kappa+\upsilon)$$
$$=(6\kappa)^3+3(6\kappa)^2\upsilon+3(6\kappa)\upsilon^2+\upsilon^3-6\kappa-\upsilon$$
$$=6\underbrace{(36\kappa^3+18\kappa^2\upsilon+3\kappa\upsilon^2-\kappa)}_{\lambda}+\upsilon^3-\upsilon$$
$$=6\lambda+(\upsilon^3-\upsilon)=\begin{cases} 6\lambda & =\pi o\lambda 6 \quad, \text{αν } \upsilon=0 \\ 6\lambda & =\pi o\lambda 6 \quad, \text{αν } \upsilon=1 \\ 6\lambda+6 & =\pi o\lambda 6 \quad, \text{αν } \upsilon=2 \\ 6\lambda+24 & =\pi o\lambda 6 \quad, \text{αν } \upsilon=3 \\ 6\lambda+60 & =\pi o\lambda 6 \quad, \text{αν } \upsilon=4 \\ 6\lambda+120 & =\pi o\lambda 6 \quad, \text{αν } \upsilon=5 \end{cases}$$

Άρα, $\alpha^3-\alpha=\pi o\lambda 6$.

(ii) Είναι:

$$\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)=\alpha(\alpha+1)[(\alpha-1)+(\alpha+2)]$$
$$=(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)+\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)$$
$$\overset{(i)}{=}6\lambda+6\mu \qquad , \ \lambda,\mu\in\mathbf{Z}$$
$$=6(\lambda+\mu)=\pi o\lambda 6\,.$$

(iii) Είναι:

$$\alpha^3+3\alpha^2-4\alpha=\alpha(\alpha^2+3\alpha-4)=\alpha(\alpha+4)(\alpha-1)$$
$$=(\alpha-1)\alpha(\alpha+4)=(\alpha-1)\alpha[(\alpha+1)+3]$$
$$=\underbrace{(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)}_{6\lambda}+\underbrace{(\alpha-1)\alpha}_{2\mu}$$
$$\overset{(i)}{=}6\lambda+3\cdot 2\mu \qquad , \ \lambda,\mu\in\mathbf{Z}$$
$$=6(\lambda+\mu)=\pi o\lambda 6\,.$$

6. (i) Έστω $P(\nu)$ ο ισχυρισμός που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για $\nu=0$, ο ισχυρισμός γράφεται $3|0$, που είναι αληθής

- Θα αποδείξουμε ότι αν ο $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και ο $P(\nu+1)$ είναι αληθής. Δηλαδή:

Αν $3|(\nu^3+2\nu)$ (1), τότε $3|[(\nu+1)^3+2(\nu+1)]$.

Πράγματι·

$$
\begin{aligned}
(\nu+1)^3+2(\nu+1) &= \nu^3+3\nu^2+3\nu+1+2\nu+2\\
&= (\nu^3+2\nu)+3(\nu^2+\nu+1)\\
&\overset{(1)}{=} 3\kappa+3(\nu^2+\nu+1)\\
&= 3(\kappa+\nu^2+\nu+1) = \pi o\lambda 3 .
\end{aligned}
$$

Άρα, ο $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

(ii) Έστω $P(\nu)$ ο ισχυρισμός που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για $\nu=0$, ο ισχυρισμός γράφεται $64|0$, που είναι αληθής
- Θα αποδείξουμε ότι, αν ο $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και ο $P(\nu+1)$ είναι αληθής. Δηλαδή:

$$\text{Αν} \quad 64|(9^{\nu+1}-8\nu-9) \quad (2), \ \text{τότε} \quad 64|(9^{\nu+2}-8(\nu+1)-9) .$$

Πράγματι, λόγω της (2), υπάρχει $\kappa \in \mathbf{Z}$ τέτοιος, ώστε

$$9^{\nu+1}-8\nu-9=64\kappa , \quad \text{οπότε} \quad 9^{\nu+1}=64\kappa+8\nu+9 \qquad (3)$$

Έτσι, έχουμε

$$
\begin{aligned}
9^{\nu+2}-8(\nu+1)-9 &= 9\cdot 9^{\nu+1}-8\nu-17\\
&\overset{(3)}{=} 9(64\kappa+8\nu+9)-8\nu-17\\
&= 64\cdot 9\kappa+64\nu+64\\
&= 64(9\kappa+\nu+1) = \pi o\lambda 64 .
\end{aligned}
$$

Άρα, ο $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

(iii) Έστω $P(\nu)$ ο ισχυρισμός που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για $\nu=0$, ο ισχυρισμός γράφεται $5|5$, που είναι αληθής
- Θα αποδείξουμε ότι, αν ο $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και ο $P(\nu+1)$ είναι αληθής. Δηλαδή:

$$\text{Αν} \quad 5|(3\cdot 27^{\nu}+2\cdot 2^{\nu}) \quad (4), \quad \text{τότε} \quad 5|(3\cdot 27^{\nu+1}+2\cdot 2^{\nu+1}) .$$

Πράγματι, λόγω της (4), υπάρχει $\kappa \in \mathbf{Z}$ τέτοιος, ώστε

$$3\cdot 27^{\nu}+2\cdot 2^{\nu}=5\kappa , \quad \text{οπότε} \quad 3\cdot 27^{\nu}=5\kappa-2\cdot 2^{\nu} \qquad (5)$$

Έτσι, έχουμε

$$3\cdot 27^{\nu+1}+2\cdot 2^{\nu+1}=3\cdot 27^{\nu}\cdot 27+2\cdot 2^{\nu}\cdot 2$$

$$\overset{(5)}{=}(5\kappa-2\cdot 2^{\nu})27+4\cdot 2^{\nu}$$

$$=5\cdot 27\kappa-54\cdot 2^{\nu}+4\cdot 2^{\nu}$$

$$=5(27\kappa-10\cdot 2^{\nu})=\piολ 5\,.$$

Άρα, ο $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε $\nu\in\mathbf{N}$.

(iv) Έστω $P(\nu)$ ο ισχυρισμός που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για $\nu=0$, ο ισχυρισμός γράφεται $14|14$, που είναι αληθής

- Θα αποδείξουμε ότι, αν ο $P(\nu)$ είναι αληθής, τότε και ο $P(\nu+1)$ είναι αληθής, δηλαδή:

$$\text{Αν}\quad 14|(3^{4\nu+2}+5^{2\nu+1})\quad (6),\quad \text{τότε}\quad 14|(3^{4\nu+6}+5^{2\nu+3})$$

Πράγματι, λόγω της (6), υπάρχει $\kappa\in\mathbf{Z}$ τέτοιος, ώστε

$$3^{4\nu+2}+5^{2\nu+1}=14\kappa\,,\quad \text{οπότε}\quad 3^{4\nu+2}=14\kappa-5^{2\nu+1} \qquad (7)$$

Έτσι, έχουμε

$$3^{4\nu+6}+5^{2\nu+3}=3^4\cdot 3^{4\nu+2}+5^2\cdot 5^{2\nu+1}$$

$$\overset{(7)}{=}3^4(14\kappa-5^{2\nu+1})+5^2\cdot 5^{2\nu+1}$$

$$=14\cdot 81\kappa-81\cdot 5^{2\nu+1}+25\cdot 5^{2\nu+1}$$

$$=14\cdot 81\kappa-56\cdot 5^{2\nu+1}$$

$$=14(81\kappa-4\cdot 5^{2\nu+1})=\piολ 14\,.$$

Άρα, ο $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε $\nu\in\mathbf{N}$.

7. Επειδή $(\kappa-\lambda)|(\kappa\alpha+\lambda\beta)$, για να δείξουμε ότι $(\kappa-\lambda)|(\lambda\alpha+\kappa\beta)$, αρκεί να δείξουμε ότι $(\kappa-\lambda)|[(\kappa\alpha+\lambda\beta)-(\lambda\alpha+\kappa\beta)]$. Έχουμε λοιπόν:

$$(\kappa\alpha+\lambda\beta)-(\lambda\alpha+\kappa\beta)=(\kappa-\lambda)\alpha-(\kappa-\lambda)\beta=(\kappa-\lambda)(\alpha-\beta)=\piολ(\kappa-\lambda)\,.$$

4.4 ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ - ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Έχουμε διαδοχικά:

$$135=2\cdot 56+23\,,\quad \text{οπότε}\quad 23=135-2\cdot 56$$
$$56=2\cdot 23+10\,,\quad \text{οπότε}\quad 10=56-2\cdot 23$$
$$23=2\cdot 10+3\,,\quad \text{οπότε}\quad 3=23-2\cdot 10$$
$$10=3\cdot 3+\boxed{1}\,,\quad \text{οπότε}\quad 1=10-3\cdot 3$$
$$3=3\cdot 1+0$$

Επομένως, έχουμε $(135,56)=1$ και

$$1=10-3\cdot 3=10-3(23-2\cdot 10)\quad =7\cdot 10-3\cdot 23$$
$$=7\cdot(56-2\cdot 23)-3\cdot 23\quad =7\cdot 56-17\cdot 23$$
$$=7\cdot 56-17(135-2\cdot 56)\ =-17\cdot 135+41\cdot 56$$

Άρα $\quad 1=(-17)\cdot 135+41\cdot 56$

(ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$180=2\cdot 84+\boxed{12}\,,\quad \text{οπότε}\quad 12=180-2\cdot 84$$
$$84=7\cdot 12+0$$

Επομένως

$$(180,84)=12\quad \text{και}\quad 12=1\cdot 180+(-2)\cdot 84$$

(iii) Είναι $(-180,84)=(180,84)=12$, οπότε, λόγω της (ii), έχουμε $12=(-1)(-180)+(-2)84$.

(iv) Είναι $(-180,-84)=(180,84)=12$, οπότε, λόγω της (ii), έχουμε $12=(-1)(-180)+2(-84)$

2. (i) Είναι $(2\kappa+2,2\kappa)=(2\kappa+2-2\kappa,2\kappa)=(2,2\kappa)=2$

(ii) Είναι $(2\nu-1,2\nu+1)=(2\nu-1,\ 2\nu+1-2\nu+1)=(2\nu-1,2)=1$, αφού ο ακέραιος $2\nu-1$ είναι περιττός

(iii) Λόγω της (ii) έχουμε: $[2\nu-1,2\nu+1]=(2\nu-1)(2\nu+1)$ (Πόρισμα σελ. 158)

(iv) Είναι $(\nu+2,2)=(\nu+2-2,2)=(\nu,2)$ και επειδή $(\nu,2)|2$ θα ισχύει $(\nu+2,2)|2$

(v) Λόγω της (ii) έχουμε $[\nu,\nu+1]=\nu(\nu+1)$ (Πόρισμα σελ. 158)

3. Έστω $\delta=(\alpha,\beta)$. Τότε

$\begin{cases}\delta|\alpha\\ \delta|\beta\end{cases}$, οπότε $\begin{cases}\delta|(\alpha+\beta)\\ \delta|(\alpha-\beta)\end{cases}$ και συνεπώς $\delta|(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$. Άρα $\delta\leq(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$, δηλαδή $(\alpha,\beta)\leq(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$.

4. Έστω $\delta=(\alpha+\beta,x+y)$. Τότε

$\begin{cases}\delta|(\alpha+\beta)\\ \delta|(x+y)\end{cases}$, οπότε $\begin{cases}\delta|(\alpha x+\beta x)\\ \delta|(\beta x+\beta y)\end{cases}$. Συνεπώς $\delta|(\alpha x+\beta x-\beta x-\beta y)$, οπότε $\delta|(\alpha x-\beta y)$. Όμως $\alpha x-\beta y=1$. Άρα $\delta|1$, οπότε $\delta=1$.

5. (i) Έστω $\delta=(2\alpha-3\beta,4\alpha-5\beta)$. Τότε

$\begin{cases}\delta|(2\alpha-3\beta)\\ \delta|(4\alpha-5\beta)\end{cases}$, οπότε $\begin{cases}\delta|(4\alpha-6\beta)\\ \delta|(4\alpha-5\beta)\end{cases}$. Άρα $\delta|(4\alpha-5\beta-4\alpha+6\beta)$, οπότε $\delta|\beta$.

(ii) Έστω $\delta=(2\alpha+3,4\alpha+5)$. Τότε

$\begin{cases}\delta|(2\alpha+3)\\ \delta|(4\alpha+5)\end{cases}$, οπότε $\begin{cases}\delta|(4\alpha+6)\\ \delta|(4\alpha+5)\end{cases}$. Άρα $\delta|(4\alpha+6-4\alpha-5)$, δηλαδή $\delta|1$, οπότε $\delta=1$.

(iii) Έστω $\delta|(5\alpha+2,7\alpha+3)$. Τότε

$\begin{cases}\delta|(5\alpha+2)\\ \delta|(7\alpha+3)\end{cases}$, οπότε $\begin{cases}\delta|(35\alpha+14)\\ \delta|(35\alpha+15)\end{cases}$. Άρα $\delta|(35\alpha+15-35\alpha-14)$, δηλαδή $\delta|1$, οπότε $\delta=1$.

6. (i) Έστω $\delta=\left(2\kappa+1,\ \dfrac{\kappa(\kappa+1)}{2}\right)$. Τότε

$$\begin{cases}\delta|(2\kappa+1)\\ \delta|\dfrac{\kappa(\kappa+1)}{2}\end{cases},\quad \text{οπότε}\quad \begin{cases}\delta|4\kappa^2+2\kappa\\ \delta|4\kappa^2+4\kappa\end{cases}.$$ Άρα $\delta|(4\kappa^2+4\kappa-4\kappa^2-2\kappa)$, οπότε $\delta|2\kappa$.

Όμως $\delta|(2\kappa+1)$. Άρα $\delta|(2\kappa+1-2\kappa)$, οπότε $\delta|1$ και συνεπώς $\delta=1$.

(ii) Σύμφωνα με την εφαρμογή 1 σελ. 155, έχουμε

$$\begin{aligned}(4\kappa^2+3\kappa-5,2\kappa^2+\kappa-2)&=\left((4\kappa^2+3\kappa-5)-2(2\kappa^2+\kappa-2),\ 2\kappa^2+\kappa-2\right)\\ &=(\kappa-1,\ 2\kappa^2+\kappa-2)\\ &=\left(\kappa-1,\ (2\kappa^2+\kappa-2)-2\kappa(\kappa-1)\right)\\ &=(\kappa-1,\ 3\kappa-2)\\ &=\left(\kappa-1,\ (3\kappa-2)-3(\kappa-1)\right)\\ &=(\kappa-1,\ 1)=1\end{aligned}$$

7. Είναι:

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta,\alpha+\beta)&=\left(\alpha,(\beta,\alpha+\beta)\right)\\ &=\left(\alpha,(\beta,\alpha)\right),\qquad \text{αφού } (\beta,\alpha+\beta)=(\beta,\alpha+\beta-\beta)=(\beta,\alpha)\\ &=(\alpha,\beta,\alpha)=(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

8. (i) Είναι $(\alpha,\alpha+\nu)=(\alpha,\alpha+\nu-\alpha)=(\alpha,\nu)$. Επομένως θέλουμε να ισχύει

$$(\alpha,\nu)=1,\quad \text{για κάθε}\quad \nu\in\mathbf{N}^*.$$

Αυτό ισχύει μόνο όταν $\alpha=1$, αφού για $\nu=\alpha$ από την παραπάνω ισότητα έχουμε $(\alpha,\alpha)=1$ και συνεπώς $\alpha=1$.

(ii) Είναι $(\nu,\alpha+\nu)=(\nu,\alpha+\nu-\nu)=(\nu,\alpha)$. Επομένως θέλουμε να ισχύει

$$(\nu,\alpha)=1,\quad \text{για κάθε}\quad \nu\in\mathbf{N}^*.$$

Αυτό ισχύει, όπως είδαμε πριν, μόνο για $\alpha=1$.

9. Έστω $\delta_1=(\alpha,\gamma)$. Τότε $\delta_1|\alpha$ και $\delta_1|\gamma$ και επειδή $\gamma|(\alpha+\beta)$, έχουμε ότι

$\delta_1|(\alpha+\beta)$. Έτσι $\delta_1|\alpha$ και $\delta_1|(\alpha+\beta)$, οπότε $\delta_1|\beta$. Άρα $\delta_1|\alpha$ και $\delta_1|\beta$, οπότε $\delta_1|(\alpha,\beta)$, δηλαδή $\delta_1|1$, οπότε $\delta_1=1$.

Έστω $\delta_2=(\beta,\gamma)$. Τότε, ομοίως εργαζόμενοι, βρίσκουμε ότι $\delta_2=1$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Έστω $\delta=(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$. Τότε

$$\begin{cases}\delta|(\alpha+\beta)\\ \delta|(\alpha-\beta)\end{cases}, \text{ οπότε } \begin{matrix}(+)\\(-)\end{matrix}\begin{cases}\delta\,|\,2\alpha\\ \delta\,|\,2\beta\end{cases} \text{ και άρα } \delta|(2\alpha,2\beta).$$

Όμως $(2\alpha,2\beta)=2(\alpha,\beta)=2\cdot 1=2$. Επομένως $\delta|2$, οπότε $\delta=1$ ή $\delta=2$.

(ii) Έστω $\delta=(2\alpha+\beta,\alpha+2\beta)$. Τότε

$$\begin{cases}\delta|(2\alpha+\beta)\\ \delta|(\alpha+2\beta)\end{cases}, \text{ οπότε } \begin{cases}\delta|[2(2\alpha+\beta)-(\alpha+2\beta)]\\ \delta|[2(\alpha+2\beta)-(2\alpha+\beta)]\end{cases} \text{ ή, ισοδύναμα, } \begin{cases}\delta|3\alpha\\ \delta|3\beta\end{cases} \text{ και άρα}$$

$\delta|(3\alpha,3\beta)$. Όμως $(3\alpha,3\beta)=3(\alpha,\beta)=3\cdot 1=3$. Επομένως $\delta|3$, οπότε $\delta=1$ ή $\delta=3$.

2. Επειδή $(\alpha,4)=2$, ο αριθμός α θα διαιρείται με τον 2, αλλά όχι με τον 4. Επομένως, το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 4 θα είναι 2, δηλαδή ο α θα είναι της μορφής:

$$\alpha=4\kappa+2, \qquad \kappa\in\mathbf{Z}.$$

Επειδή $(\beta,4)=2$, ο αριθμός β θα διαιρείται με τον 2, αλλά όχι με τον 4. Επομένως ο β θα είναι της μορφής:

$$\beta=4\lambda+2, \qquad \lambda\in\mathbf{Z}.$$

Έτσι, θα έχουμε

$$(\alpha+\beta,\ 4)=(4(\kappa+\lambda+1),\ 4)=4(\kappa+\lambda+1,\ 1)=4.$$

3. Για να απλοποιείται το κλάσμα $\dfrac{2\nu+3}{5\nu+7}$, αρκεί ο ΜΚΔ των όρων του να είναι διαφορετικός της μονάδας. Έστω $\delta=(2\nu+3,5\nu+7)$. Τότε

$\begin{cases}\delta|2\nu+3\\ \delta|5\nu+7\end{cases}$, οπότε $\delta|[5(2\nu+3)-2(5\nu+7)]$. Άρα $\delta|1$, οπότε $\delta=1$. Έτσι, το κλάσμα $\dfrac{2\nu+3}{5\nu+7}$ είναι ανάγωγο για όλες τις τιμές του $\nu\in\mathbf{N}^*$.

4. Έστω $(\alpha,\beta)=[\alpha,\beta]=x$. Επειδή $x=(\alpha,\beta)$ θα ισχύει

$$x|\alpha \quad \text{και} \quad x|\beta \tag{1}$$

και επειδή $x=[\alpha,\beta]$, θα ισχύει

$$\alpha|x \quad \text{και} \quad \beta|x \tag{2}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε ότι $x=\alpha$ και $x=\beta$, οπότε $\alpha=\beta$. *Αντιστρόφως,* αν $\alpha=\beta$, τότε $(\alpha,\beta)=(\alpha,\alpha)=\alpha$ και $[\alpha,\beta]=[\alpha,\alpha]=\alpha$, οπότε $(\alpha,\beta)=[\alpha,\beta]$.

5. Είναι

$$(\alpha,\beta)=3^2, \qquad (\beta,\gamma)=2\cdot3\cdot5 \qquad \text{και} \qquad (\gamma,\alpha)=2^2\cdot3.$$

Επομένως, από τη δεύτερη σχέση έχουμε ότι $2|\beta$, ενώ από την τρίτη ότι $2|\alpha$. Έτσι, θα πρέπει $2|(\alpha,\beta)$, δηλαδή $2|3^2$, που είναι άτοπο.

6. Είναι

$$\kappa\alpha+\lambda\beta=\delta \Leftrightarrow \kappa\frac{\alpha}{\delta}+\lambda\frac{\beta}{\delta}=1$$

$$\Leftrightarrow \kappa A+\lambda B=1, \text{ όπου } A=\frac{\alpha}{\delta}\in\mathbf{Z} \text{ και } B=\frac{\beta}{\delta}\in\mathbf{Z}.$$

Έτσι, σύμφωνα με το πόρισμα 1, οι ακέραιοι κ, λ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

7. (i) Έστω $\delta=(\alpha,\beta)$ και $\delta'=(\alpha,\kappa\beta)$. Τότε

$\begin{cases}\delta|\alpha\\ \delta|\beta\end{cases}$, οπότε $\begin{cases}\delta|\alpha\\ \delta|\kappa\beta\end{cases}$. Άρα $\delta|(\alpha,\kappa\beta)$, δηλαδή $\qquad \boldsymbol{\delta|\delta'}$ (1).

Επειδή $(\alpha,\kappa)=1$, θα υπάρχουν $x,y\in\mathbf{Z}$ τέτοιοι, ώστε $x\alpha+y\kappa=1$, οπότε

$$x\alpha\beta+y\kappa\beta=\beta\,. \tag{2}$$

Έτσι, έχουμε

$\begin{cases}\delta'|\alpha \\ \delta'|\kappa\beta\end{cases}$, οπότε $\delta'|(x\alpha\beta+y\kappa\beta)$ και άρα, λόγω της (2), $\delta'|\beta$. Συνεπώς $\begin{cases}\delta'|\alpha \\ \delta'|\beta\end{cases}$,

οπότε $\delta'|(\alpha,\beta)$, δηλαδή $\boldsymbol{\delta'|\delta}$. (3)

Από (1) και (3) προκύπτει ότι $\delta'=\delta$, δηλαδή $(\alpha,\kappa\beta)=(\alpha,\beta)$.

(ii) Είναι:

$$[\alpha,\kappa\beta]=\frac{\alpha\cdot\kappa\beta}{(\alpha,\kappa\beta)}\overset{(1)}{=}\kappa\frac{\alpha\beta}{(\alpha,\beta)}=\kappa[\alpha,\beta].$$

8. Είναι:

$$\begin{aligned}[\alpha\gamma,\beta\gamma,\alpha\delta,\beta\delta]&=\big[[\alpha\gamma,\beta\gamma],[\alpha\delta,\beta\delta]\big]\\&=\big[[\alpha,\beta]\gamma,[\alpha,\beta]\delta\big]=[\alpha,\beta][\gamma,\delta].\end{aligned}$$

4.5 ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Είναι $10<\sqrt{101}<11$. Επομένως, για να είναι ο 101 πρώτος αρκεί να μην έχει θετικό πρώτο διαιρέτη μικρότερο του 11. Επειδή κανένας από τους πρώτους 2, 3, 5, 7, που είναι μικρότεροι του 11, δεν διαιρεί τον 101, ο αριθμός 101 είναι πρώτος. Αν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο, διαπιστώνουμε ότι οι αριθμοί 103, 107 και 113 είναι πρώτοι, ενώ οι 111 και 121 είναι σύνθετοι.

2. Από το κόσκινο του Ερατοσθένη βρίσκουμε ότι

(i) $\alpha=8$ αφού οι αριθμοί 8, 9, 10 είναι τρεις πρώτοι στη σειρά διαδοχικοί σύνθετοι αριθμοί.

(ii) $\alpha=24$, αφού οι αριθμοί 24, 25, 26, 27 είναι τέσσερις πρώτοι στη σειρά διαδοχικοί σύνθετοι αριθμοί.

3. (i) Επειδή $\alpha+\beta>\alpha-\beta$ έχουμε

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=3\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=1\\ \alpha+\beta=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha=4\\ 2\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}.$$

(ii) Επειδή $\alpha^2-4=(\alpha+2)(\alpha-2)$ και $\alpha+2>\alpha-2$ έχουμε

$$\alpha^2-4=p \Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha+2)=p \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-2=1 \\ \alpha+2=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=3 \\ p=5 \end{cases}.$$

(iii) Επειδή $a^2-1=(a-1)(a+1)$ και $a+1>a-1$ και $p>3$, έχουμε

$$(\alpha^2-1)p=15 \Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha+1)p=1\cdot 3\cdot 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-1=1 \\ \alpha+1=3 \\ p=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ p=5 \end{cases}.$$

4. Έχουμε

$$\begin{aligned} 3p+1=v^2 &\Leftrightarrow 3p=v^2-1 \\ &\Leftrightarrow 3p=(v-1)(v+1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v-1=3 \\ v+1=p \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} v-1=p \\ v+1=3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v=4 \\ p=5 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} v=3 \\ p=1 \end{cases} \text{ αδύνατο} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v=4 \\ p=5 \end{cases}. \end{aligned}$$

5. Έχουμε

- $v^3-1=p \Leftrightarrow (v-1)(v^2+v+1)=1\cdot p$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v-1=1 \\ v^2+v+1=p \end{cases}, \quad \text{αφού} \quad v^2+v+1>1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=2 \\ p=7 \end{cases}$$

- $v^3+1=p \Leftrightarrow (v+1)(v^2-v+1)=1\cdot p$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v+1=p \\ v^2-v+1=1 \end{cases}, \quad \text{αφού} \quad v+1>1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v+1=p \\ v^2-v=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p=2 \\ v=1 \end{cases}.$$

6. Οι α, β είναι της μορφής

$$\alpha=2\kappa+1 \quad \text{και} \quad \beta=2\lambda+1, \quad \kappa,\lambda\in\mathbf{N}^*.$$

Επομένως

$$\alpha^2+\beta^2=(2\kappa+1)^2+(2\lambda+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1+4\lambda^2+4\lambda+1=4\kappa^2+4\lambda^2+4\kappa+4\lambda+2$$

$$=2(2\kappa^2+2\lambda^2+2\kappa+2\lambda+1),$$

που είναι σύνθετος, αφού είναι της μορφής 2μ, όπου $\mu=2\kappa^2+2\lambda^2+2\kappa+2\lambda+1>1$.

7. Αν $p|\alpha^\nu$, τότε $p|\alpha$, οπότε $\alpha=\kappa p$, όπου $\kappa\in\mathbf{Z}$. Άρα $\alpha^\nu=\kappa^\nu p^\nu$, οπότε $p^\nu|\alpha^\nu$.

8. **α΄ τρόπος:** Έστω ότι $(\alpha^\mu,\beta^\nu)>1$. Τότε θα υπάρχει θετικός πρώτος διαιρέτης *p* του (α^μ,β^ν). Άρα θα ισχύει

$\begin{cases} p|\alpha^\mu \\ p|\beta^\nu \end{cases}$, οπότε $\begin{cases} p|\alpha \\ p|\beta \end{cases}$. Συνεπώς $p|(\alpha,\beta)$, οπότε $p|1$ και άρα $p=1$, που είναι άτοπο.

β΄ τρόπος: Επειδή $(\alpha,\beta)=1$, οι κανονικές μορφές των α και β δεν έχουν κοινό παράγοντα. Άρα και οι κανονικές μορφές των α^μ και β^ν δεν θα έχουν κοινό παράγοντα, οπότε θα ισχύει $(\alpha^\mu,\beta^\nu)=1$.

9. Εργαζόμαστε όπως και στο Γυμνάσιο:

490	2	1125	3	2728	2
245	5	375	3	1364	2
49	7	125	5	682	2
7	7	25	5	341	11
1		5	5	31	31
		1		1	

Έτσι, έχουμε

$$490=2\cdot5\cdot7^2, \qquad 1125=3^2\cdot5^3, \qquad 2728=2^3\cdot11\cdot31.$$

Επομένως, σύμφωνα με το συμπέρασμα της σελίδας 167, είναι

$$(490,1125,2728)=1 \qquad \text{και} \qquad [490,1125,2728]=2^3\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 31\,.$$

10. Αν οι εκθέτες είναι όλοι άρτιοι, τότε θα είναι της μορφής

$$\alpha_1=2\beta_1,\ \ \alpha_2=2\beta_2,\ \ ...,\ \ \alpha_\kappa=2\beta_\kappa, \quad \text{όπου} \quad \beta_1,\beta_2,...,\beta_\kappa\in\mathbf{N}^*$$

οπότε θα ισχύει

$$a=p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}...p_\kappa^{2\beta_\kappa}=\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_\kappa^{\beta_\kappa}\right)^2=\beta^2, \quad \text{όπου} \quad \beta=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_\kappa^{\beta_\kappa}\,.$$

Αντιστρόφως, έστω $\alpha=\beta^2$, όπου $\beta\in\mathbf{N}^*$. Τότε κάθε θετικός πρώτος διαιρέτης του β θα είναι και διαιρέτης του α. Επομένως, ο β θα έχει ως κανονική μορφή την

$$\beta=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_\kappa^{\beta_\kappa}\,.$$

Έτσι η ισότητα $\alpha=\beta^2$ γράφεται

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_\kappa^{\alpha_\kappa}=\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_\kappa^{\beta_\kappa}\right)^2=p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}...p_\kappa^{2\beta_\kappa}$$

οπότε έχουμε $\alpha_1=2\beta_1$, $\alpha_2=2\beta_2,\ldots,$ $\alpha_\kappa=2\beta_\kappa$. Άρα όλοι οι εκθέτες της κανονικής μορφής του α θα είναι άρτιοι.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Ας υποθέσουμε ότι $(\alpha+\beta,\alpha\beta)>1$. Τότε ο $(\alpha+\beta,\alpha\beta)$ θα έχει έναν, τουλάχιστον, θετικό πρώτο διαιρέτη, έστω τον *p*. Επομένως, θα ισχύει

$$\begin{cases} p|(\alpha+\beta) \\ p|\alpha\beta \end{cases}, \text{ οπότε } \begin{cases} p|(\alpha+\beta) \\ p|\alpha \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} p|(\alpha+\beta) \\ p|\beta \end{cases}$$

και στις δύο περιπτώσεις θα έχουμε $p|\alpha$ και $p|\beta$, οπότε $p|(\alpha,\beta)$, δηλαδή $p|1$, που είναι άτοπο.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι $(\alpha^2+\beta^2,\alpha\beta)>1$. Τότε ο $(\alpha^2+\beta^2,\alpha\beta)$ θα έχει έναν, τουλάχιστον, θετικό πρώτο διαιρέτη, έστω τον *p*. Επομένως, θα ισχύει

$$\begin{cases} p|(\alpha^2+\beta^2) \\ p|\alpha\beta \end{cases}, \quad \text{οπότε} \quad \begin{cases} p|(\alpha^2+\beta^2) \\ p|\alpha \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} p|(\alpha^2+\beta^2) \\ p|\beta \end{cases}.$$

$$\text{Άρα} \quad \begin{cases} p|\beta^2 \\ p|\alpha \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} p|\alpha^2 \\ p|\beta \end{cases} \quad \text{οπότε} \quad \begin{cases} p|\beta \\ p|\alpha \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} p|\alpha \\ p|\beta \end{cases}.$$

Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις θα έχουμε $p|(\alpha,\beta)$, δηλαδή $p|1$, που είναι άτοπο.

2. • Υποθέτουμε ότι $(\alpha,\beta\gamma)=1$ και θα δείξουμε ότι $(\alpha,\beta)=1$ και $(\alpha,\gamma)=1$. Έστω ότι $(\alpha,\beta)>1$. Τότε ο (α,β) θα έχει έναν, τουλάχιστον, θετικό πρώτο διαιρέτη, έστω τον *p*. Επομένως, θα ισχύει

$\begin{cases} p|\alpha \\ p|\beta \end{cases}$, οπότε $\begin{cases} p|\alpha \\ p|\beta\gamma \end{cases}$. Άρα $p|(\alpha,\beta\gamma)$, δηλαδή $p|1$, που είναι άτοπο.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $(\alpha,\gamma)=1$.

• Υποθέτουμε ότι $(\alpha,\beta)=(\alpha,\gamma)=1$ και θα δείξουμε ότι $(\alpha,\beta\gamma)=1$. Έστω ότι $(\alpha,\beta\gamma)>1$. Τότε ο $(\alpha,\beta\gamma)$ θα έχει έναν, τουλάχιστον, θετικό πρώτο διαιρέτη, έστω τον *p*. Επομένως, θα ισχύει

$\begin{cases} p|\alpha \\ p|\beta\gamma \end{cases}$, οπότε $\begin{cases} p|\alpha \\ p|\beta \end{cases}$ ή $\begin{cases} p|\alpha \\ p|\gamma \end{cases}$. Άρα $p|(\alpha,\beta)$ ή $p|(\alpha,\gamma)$, δηλαδή $p|1$, που είναι άτοπο.

3. Επειδή $(\alpha,p^2)=p$ και $(\beta,p^3)=p^2$ οι ακέραιοι α,β θα είναι της μορφής:

$$\alpha=pA \quad \text{με} \quad p\nmid A \quad \text{και} \quad \beta=p^2B \quad \text{με} \quad p\nmid B \qquad (1)$$

Έτσι, θα έχουμε

• $(\alpha\beta,p^4)=(p^3AB,p^4)=p^3(AB,p)\overset{(1)}{=}p^3\cdot 1=p^3$, αφού $p\nmid AB$

• $(\alpha+\beta,p^4)=(pA+p^2B,p^4)=p(A+pB,p^3)=p\cdot 1=p$, αφού $p\nmid(A+pB)$

4. Έχουμε

• $$\nu^4+4=(\nu^4+4\nu^2+4)-4\nu^2=(\nu^2+2)^2-(2\nu)^2=(\nu^2-2\nu+2)(\nu^2+2\nu+2)$$
$$=[(\nu-1)^2+1]\cdot[(\nu+1)^2+1]$$

Άρα ο ν^4+4 είναι σύνθετος, αφού $(\nu-1)^2+1>1$ και $(\nu+1)^2+1>1$.

• $8^\nu+1=(2^3)^\nu+1=(2^\nu)^3+1=(2^\nu+1)(2^{2\nu}-2^\nu+1)$

Άρα $8^\nu+1=(2^\nu+1)(2^{2\nu}-2^\nu+1)$.

Όμως $1<2^\nu+1<8^\nu+1$. Άρα ο $8^\nu+1$ είναι σύνθετος.

5. Επειδή $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{43}{34}$, έχουμε $34\alpha=43\beta$ (1).

Επομένως, $34|43\beta$ και επειδή $(34,43)=1$, θα ισχύει $34|\beta$. Άρα, υπάρχει $\kappa\in\mathbf{N}^*$, τέτοιος ώστε $\beta=34\kappa$, οπότε, λόγω της (1), θα είναι $\alpha=43\kappa$. Έχουμε λοιπόν

$$\alpha=43\kappa \quad \text{και} \quad \beta=34\kappa, \quad \kappa\in\mathbf{N}^*,$$

οπότε

$$\alpha+\beta=43\kappa+34\kappa=77\kappa=7\cdot 11\cdot\kappa .$$

Άρα,ο αριθμός $\alpha+\beta$ είναι σύνθετος.

6. Έστω p είναι θετικός πρώτος αριθμός. Τότε ο p θα είναι της μορφής:

$$p=3\kappa \quad \text{ή} \quad p=3\kappa+1 \quad \text{ή} \quad p=3\kappa+2, \quad \kappa\in\mathbf{N}^*.$$

- Αν $p=3\kappa$, $\kappa\in\mathbf{N}^*$, επειδή ο p είναι πρώτος, θα είναι $\kappa=1$, οπότε θα έχουμε $p=3$, $p+2=5$ και $p+4=7$. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι και οι τρεις αριθμοί $p,\ p+2,\ p+4$ είναι πρώτοι.

- Αν $p=3\kappa+1$, $\kappa\in\mathbf{N}^*$, τότε θα είναι $p+2=3\kappa+3=3(\kappa+1)$, οπότε ο αριθμός $p+2$ είναι σύνθετος. Άρα, δεν είναι και οι τρεις αριθμοί $p,\ p+2$ και $p+4$ πρώτοι.

- Αν $p=3\kappa+2$, $\kappa\in\mathbf{N}^*$, τότε θα είναι $p+4=3\kappa+6=3(\kappa+2)$, οπότε ο αριθμός $p+4$ είναι σύνθετος. Άρα, δεν είναι και οι τρεις αριθμοί $p,\ p+2$ και $p+4$ πρώτοι. Άρα, ο μοναδικός θετικός πρώτος p, για τον οποίο οι αριθμοί $p,\ p+2$ και $p+4$ είναι και οι τρεις πρώτοι, είναι ο $p=3$.

7. (i) **α΄ τρόπος:** $x^3+x^2+x-3=0 \Leftrightarrow x(x^2+x+1)=3$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ και } x^2+x+1=3, \text{ αφού } x^2+x+1>x$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

β΄ τρόπος: Πιθανές θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης είναι οι θετικοί διαιρέτες του 3, δηλαδή οι αριθμοί 1 και 3. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι μόνο η $x=1$ είναι λύση της εξίσωσης.

(ii) Είναι $x^2+x+p=112 \Leftrightarrow p=112-x(x+1)$.

Όμως, ο αριθμός $x(x+1)$ είναι άρτιος. Άρα, ο αριθμός p θα είναι άρτιος,

οπότε θα είναι $p=2$. Έτσι η εξίσωση γράφεται

$$x^2+x+2=112 \Leftrightarrow x^2+x-110=0$$

$$\Leftrightarrow x=10 \text{ ή } x=-11$$

Επομένως, η θετική ακέραια λύση της εξίσωσης είναι η $x=10$.

8. Αν $p_1, p_2, ..., p_\kappa$ οι κοινοί και μη κοινοί θετικοί πρώτοι παράγοντες των α και β, τότε θα ισχύει

$$\alpha=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_\kappa^{\alpha_\kappa} \quad \text{και} \quad \beta=p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_\kappa^{\beta_\kappa} \qquad (1)$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_\kappa$ φυσικοί αριθμοί. Επομένως, θα είναι

$$\alpha^2=p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} ... p_\kappa^{2\alpha_\kappa} \quad \text{και} \quad \beta^2=p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} ... p_\kappa^{2\beta_\kappa} \qquad (2)$$

Επειδή $\beta^2|\alpha^2$, λόγω της (2), θα ισχύει

$$2\beta_1 \le 2\alpha_1,\ 2\beta_2 \le 2\alpha_2,\ \ldots,\ 2\beta_\kappa \le 2\alpha_\kappa$$

οπότε, θα έχουμε

$$\beta_1 \le \alpha_1,\ \beta_2 \le \alpha_2,\ \ldots,\ \beta_\kappa \le \alpha_\kappa .$$

Άρα, λόγω της (1), έχουμε ότι $\beta|\alpha$.

4.6 Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. (i) Είναι $(4,6)=2$, οπότε $(4,6) \nmid 5$. Άρα η εξίσωση $4x+6y=5$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.

(ii) Είναι $(4,-6)=2$, οπότε $(4,-6)|2$. Άρα η εξίσωση $4x-6y=2$ έχει ακέραιες λύσεις.

(iii) Είναι $(3,5)=1$, οπότε $(3,5)|\kappa$. Άρα η εξίσωση $3x+5y=\kappa$ έχει ακέραιες λύσεις.

(iv) Είναι $(\kappa,\kappa+1)=1$, οπότε $(\kappa,\kappa+1)|\lambda$. Άρα η εξίσωση $\kappa x+(\kappa+1)y=\lambda$ έχει ακέραιες λύσεις.

(v) Για όλες τις ακέραιες τιμές των x, y το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι άρτιος αριθμός, ενώ το δεύτερο μέλος περιττός. Άρα η εξίσωση $2\kappa x+4y=2\lambda+1$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.

2. (i) Μια προφανής ακέραια λύση της εξίσωσης είναι η $(x_0,y_0)=(1,1)$. Άρα, οι ακέραιες λύσεις, (x,y), της εξίσωσης δίνονται από τις σχέσεις

$$x=1+3t \quad \text{και} \quad y=1-2t, \quad t\in\mathbf{Z}.$$

(ii) Η εξίσωση $6x-4y=8$ γράφεται ισοδύναμα

$$3x-2y=4$$

και έχει μια προφανή λύση την $(x_0,y_0)=(2,1)$. Άρα οι ακέραιες λύσεις, (x,y), της εξίσωσης δίνονται από τις σχέσεις

$$x=2+2t \quad \text{και} \quad y=1+3t, \quad t\in\mathbf{Z}.$$

(iii) Μια προφανής ακέραια λύση της εξίσωσης είναι η $(x_0,y_0)=(2,-1)$. Άρα, οι ακέραιες λύσεις, (x,y), της εξίσωσης δίνονται από τις σχέσεις

$$x=2+5t \quad \text{και} \quad y=-1+7t, \quad t\in\mathbf{Z}.$$

(iv) Μια προφανής ακέραια λύση της εξίσωσης είναι η $(x_0,y_0)=(2,1)$. Άρα, οι ακέραιες λύσεις, (x,y), της εξίσωσης δίνονται από τις σχέσεις

$$x=2+3t \quad \text{και} \quad y=1+5t, \quad t\in\mathbf{Z}.$$

3. (i) Έχουμε

$$\begin{aligned} 111x+78y=300 &\Leftrightarrow 3(37x+26y)=3\cdot 100 \\ &\Leftrightarrow 37x+26y=100 \qquad (1) \end{aligned}$$

Μια προφανής ακέραια λύση της εξίσωσης είναι η $(x_0,y_0)=(2,1)$. Επομένως, οι ακέραιες λύσεις, (x,y), της εξίσωσης (1) δίνονται από τις σχέσεις

$$x=2+26t \quad \text{και} \quad y=1-37t, \quad t\in\mathbf{Z}.$$

Επειδή αναζητούμε τις θετικές ακέραιες λύσεις, έχουμε

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+26t>0 \\ 1-37t>0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{13}<t<\frac{1}{37} \Leftrightarrow t=0 .$$

Άρα, η μοναδική θετική ακέραια λύση της εξίσωσης είναι η $(x,y)=(2,1)$.

(ii) Μια προφανής ακέραια λύση της εξίσωσης $47x-31y=78$ είναι η $(x_0,y_0)=(1,-1)$. Επομένως, οι ακέραιες λύσεις (x,y) της εξίσωσης (1) δίνονται από τις σχέσεις

$$x=1+31t \quad \text{και} \quad y=-1+47t, \quad t\in\mathbf{Z} .$$

Επειδή αναζητούμε τις θετικές ακέραιες λύσεις, έχουμε

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+31t>0 \\ -1+47t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>-\frac{1}{31} \\ t>\frac{1}{47} \end{cases} \Leftrightarrow t\in\mathbf{N}^* .$$

Άρα, η εξίσωση έχει άπειρες θετικές ακέραιες λύσεις (x,y). Αυτές δίνονται από τις σχέσεις

$$x=1+31t \quad \text{και} \quad y=-1+47t, \quad t\in\mathbf{N}^* .$$

4. (i) Η εξίσωση $3x+5y=-15$ δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις, αφού για όλους του θετικούς ακέραιους x, y το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι θετικός αριθμός, ενώ το δεύτερο μέλος αρνητικός αριθμός.

(ii) Η εξίσωση $111x+78y=50$ δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις, αφού για όλους τους θετικούς ακέραιους x, y ισχύει:

$$111x+78y\geq 111\cdot 1+78\cdot 1=189>50 .$$

(iii) Η εξίσωση $5x+7y=5$ δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις, αφού για όλους τους θετικούς ακέραιους x, y ισχύει:

$$5x+7y\geq 5\cdot 1+7\cdot 1=12>5 .$$

5. Έστω ότι αλλάζουμε το νόμισμα 10.000 δρχ. με x χιλιάρικα και y πεντακοσάρικα. Τότε θα ισχύει $1000x+500y=10000$ ή, ισοδύναμα,

$$2x+y=20 \qquad (1) , \qquad \text{όπου } x\geq 0,\ y\geq 0 .$$

Αναζητούμε, επομένως, τις μη αρνητικές λύσεις της (1). Μια προφανής ακέραια λύση της (1) είναι η $(x_0, y_0) = (0, 20)$. Επομένως, οι ακέραιες λύσεις, (x, y), της (1) δίνονται από τις σχέσεις

$$x = 0 + t \quad \text{και} \quad y = 20 - 2t, \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 20-2t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 10 \ \Leftrightarrow t=0,1,2,...,10\,.$$

Άρα, οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της (1) είναι οι:

$$(0,20)\,,\ (1,18)\,,\ (2,16)\,,\ (3,14)\,,\ (4,12)\,,\ (5,10)$$

$$(6,8)\,,\quad (7,6)\,,\ \ (8,4)\,,\quad (9,2)\,,\ \ (10,0)\,.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν καθένα από τα μεγάλα πακέτα περιέχει x σαπούνια και καθένα από τα μικρά πακέτα περιέχει y σαπούνια, τότε θα ισχύει

$$19x+3y=224 \quad \text{και} \quad x>y>0 \tag{1}$$

Αναζητούμε, επομένως, θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (1). Επειδή $(19,3)=1$, η εξίσωση (1) έχει ακέραιες λύσεις. Αρχικά βρίσκουμε μια ειδική λύση της (1) ως εξής:

Γράφουμε τον $(19,3)=1$ ως γραμμικό συνδυασμό των 19 και 3:

$$19 \cdot 1+3(-6)=1 \tag{2}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (2) με 224:

$$19 \cdot 224+3(-1344)=224$$

Άρα μια ειδική λύση της (1) είναι η $(x_0, y_0)=(224,-1344)$. Επομένως οι ακέραιες λύσεις της (1) δίνονται από τους τύπους

$$x=224+3t \quad \text{και} \quad y=-1344-19t\,, \quad t\in\mathbf{Z} \tag{3}$$

Από τις λύσεις αυτές θα βρούμε εκείνες για τις οποίες ισχύει $x>0$ και $y>0$.

Έχουμε

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 224+3t>0 \\ -1344-19t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>-\dfrac{224}{3} \\ t<-\dfrac{1344}{19} \end{cases} \Leftrightarrow -74{,}6<t<-70{,}73$$

$$\Leftrightarrow t=-71 \quad \text{ή} \quad t=-72 \quad \text{ή} \quad t=-73 \quad \text{ή} \quad t=-74\,.$$

Επομένως, οι αντίστοιχες τιμές των x και y δίνονται από τον πίνακα

x	11	8	5	2
y	5	24	43	62

και επειδή $x>y$, θα είναι $(x,y)=(11,5)$.

2. Αναζητούμε θετικούς ακέραιους x και y για τους οποίους ισχύει

$$7x+11y=100 \qquad (1)$$

Επειδή $(7,11)=1$, η εξίσωση (1) έχει ακέραιες λύσεις. Αρχικά βρίσκουμε μια ειδική λύση της (1) ως εξής:

Γράφουμε τον $(7,11)=1$ ως γραμμικό συνδυασμό των 7 και 11:

$$7(-3)+11\cdot 2=1 \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2) με 100:

$$7(-300)+11\cdot 200=100$$

Άρα μια ειδική λύση της (1) είναι η $(x_0,y_0)=(-300,200)$. Επομένως οι ακέραιες λύσεις της (1) δίνονται από τους τύπους:

$$x=-300+11t \quad \text{και} \quad y=200-7t\,, \quad t\in\mathbf{Z} \qquad (3)$$

Θα βρούμε τώρα τις θετικές λύσεις της (1). Έχουμε λοιπόν

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -300+11t>0 \\ 200-7t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{300}{11}<t<\frac{200}{7} \Leftrightarrow t=28\,.$$

Επομένως, η εξίσωση έχει μια μόνο θετική λύση την $(x,y)=(8,4)$. Άρα

$$100=7\cdot 8+11\cdot 4=56+44\,.$$

3. Έστω $\delta=(\alpha,\beta)$. Επειδή $\delta|\gamma$ η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις. Αν (x_0,y_0) είναι μια ακέραια λύση της εξίσωσης, τότε οι ακέραιες λύσεις της, (x,y), θα δίνονται από τις σχέσεις

$$x=x_0-\frac{\beta}{\delta}t \quad \text{και} \quad y=y_0+\frac{\alpha}{\delta}t\,, \quad t\in\mathbf{Z}\,.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο λύσεις (x_1,y_1) και (x_2,y_2) της εξίσωσης. Τότε

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{\beta}{\delta} t_1 \\ y_1 = y_0 + \dfrac{\alpha}{\delta} t_1 \end{cases} \quad (1) \quad \text{και} \quad \begin{cases} x_2 = x_0 - \dfrac{\beta}{\delta} t_2 \\ y_2 = y_0 + \dfrac{\alpha}{\delta} t_2 \end{cases} \quad (2), \quad \text{όπου} \quad t_1, t_2 \in \mathbf{Z}$$

οπότε, η απόσταση των $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ θα είναι ίση με

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\frac{\beta^2}{\delta^2}(t_2 - t_1)^2 + \frac{\alpha^2}{\delta^2}(t_2 - t_1)^2}$$

$$= |t_2 - t_1| \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\delta}.$$

Επομένως, η απόσταση (AB) ελαχιστοποιείται, όταν ελαχιστοποιηθεί η παράσταση $|t_2 - t_1|$. Αυτό συμβαίνει όταν $|t_2 - t_1| = 1$, οπότε η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο διαφορετικά σημεία της ευθείας $\alpha x + \beta y = \gamma$ με ακέραιες συντεταγμένες είναι ίση με $\dfrac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\delta}$.

4. (i) Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \alpha\beta$ έχει ακέραιες λύσεις, αφού $(\alpha, \beta) = 1$. Μια προφανής λύση της είναι η $(x_0, y_0) = (\beta, 0)$. Άρα, οι λύσεις, (x, y), της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους

$$x = \beta + \beta t \quad \text{και} \quad y = -\alpha t, \quad \text{όπου} \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει θετικές λύσεις, τότε θα ισχύει

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \beta t > 0 \\ -\alpha t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -1 \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < t < 0,$$

που είναι αδύνατο, αφού $t \in \mathbf{Z}$. Άρα, η εξίσωση δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.

(ii) Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = 2\alpha\beta$ έχει ακέραιες λύσεις, αφού $(\alpha, \beta) = 1$. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $(x_0, y_0) = (\beta, \alpha)$. Επομένως, οι λύσεις, (x, y), της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x = \beta + \beta t \quad \text{και} \quad y = \alpha - \alpha t, \quad \text{όπου} \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Αναζητούμε θετικές λύσεις της εξίσωσης. Άρα θέλουμε να ισχύει

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \beta t > 0 \\ \alpha - \alpha t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -1 \\ t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < t < 1 \Leftrightarrow t = 0.$$

Άρα, μοναδική θετική λύση της εξίσωσης είναι η (β, α).

5. Έστω $x, y \in \mathbf{N}^*$ οι αριθμητές των κλασμάτων. Τότε θα ισχύει

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{13}=\frac{33}{91}, \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad 13x+7y=33. \qquad (1)$$

Αναζητούμε, επομένως, τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (1). Επειδή $(13,7)=1$, η (1) έχει ακέραιες λύσεις. Μια ειδική της λύση είναι η $(-33,66)$. Άρα, οι ακέραιες λύσεις, (x, y), της (1) δίνονται από τους τύπους

$$x=-33+7t \quad \text{και} \quad y=66-13t, \quad \text{όπου} \quad t\in\mathbf{Z}.$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -33+7t>0 \\ 66-13t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{33}{7}<t<\frac{66}{13} \Leftrightarrow t=5.$$

Άρα $x=2$ και $y=1$ και επομένως $\frac{33}{91}=\frac{2}{7}+\frac{1}{13}$.

4.7 ΙΣΟΫΠΟΛΟΙΠΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Για τα στοιχεία του συνόλου A έχουμε:

$33=4\cdot 7+5$,	οπότε	$33\equiv 5 \pmod 7$
$-17=(-3)7+4$,	οπότε	$-17\equiv 4 \pmod 7$
$23=3\cdot 7+2$,	οπότε	$23\equiv 2 \pmod 7$
$35=5\cdot 7+0$,	οπότε	$35\equiv 0 \pmod 7$
$41=5\cdot 7+6$,	οπότε	$41\equiv 6 \pmod 7$
$-20=(-3)7+1$,	οπότε	$-20\equiv 1 \pmod 7$

2. (i) Αληθής για κάθε $\kappa\in\mathbf{Z}$, αφού $(15\kappa+1)-1=15\kappa=$πολ3

(ii) Αληθής για κάθε $\kappa\in\mathbf{Z}$, αφού $(15\kappa+1)+4=15\kappa+5=$πολ5

(iii) Δεν αληθεύει για κάθε $\kappa\in\mathbf{Z}$, αφού $(\kappa^2+5)-1=\kappa^2+4$ που δεν είναι πολλαπλάσιο του 4 όταν ο κ είναι περιττός.

(iv) Αληθής για κάθε $m \in \mathbf{N}^*$. Πράγματι είναι $m+1 \equiv 1(\bmod m)$ οπότε $(m+1)^3 \equiv 1^3 \equiv 1(\bmod m)$.

3. Είναι

$$\begin{cases} \alpha \equiv 6(\bmod 11) \\ 10 \le \alpha < 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 11\kappa + 6, \quad \kappa \in \mathbf{Z} & (1) \\ 10 \le \alpha < 100 & (2) \end{cases}$$

Η (2), λόγω της (1) γράφεται

$$\begin{aligned} 10 \le 11\kappa + 6 < 100 &\Leftrightarrow 4 \le 11\kappa < 94 \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{11} \le \kappa < \frac{94}{11} \\ &\Leftrightarrow \kappa = 1, 2, \ldots, 8, \end{aligned}$$

οπότε, από την (1) παίρνουμε

$$\alpha = 17,\ 28,\ 39,\ 50,\ 61,\ 72,\ 83,\ 94.$$

4. (i) Έστω α ένας από τους ζητούμενους θετικούς ακέραιους. Τότε θα ισχύει

$$\alpha \equiv 2(\bmod 3) \quad \text{και} \quad \alpha \equiv 1(\bmod 4) \qquad (1)$$

οπότε θα υπάρχουν $x, y \in \mathbf{Z}$ τέτοιοι ώστε

$$\alpha = 3x + 2 \quad \text{και} \quad \alpha = 4y + 1 \qquad (2)$$

οπότε $3x + 2 = 4y + 1$ και άρα

$$-3x + 4y = 1 \qquad (3)$$

Μια προφανής ακέραια λύση της (3) είναι η $(x_0, y_0) = (1,1)$. Άρα, οι ακέραιες λύσεις της, (x, y), δίνονται από τις σχέσεις

$$x = 1 + 4t \quad \text{και} \quad y = 1 + 3t, \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Επομένως, λόγω της (2), θα είναι

$$\alpha = 12t + 5, \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Όμως ο α είναι διψήφιος. Άρα θα ισχύει

$$\begin{aligned} 10 \le \alpha < 100 &\Leftrightarrow 10 \le 12t + 5 < 100 \\ &\Leftrightarrow 5 \le 12t < 95 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{12} \le t < \frac{95}{12} \\ &\Leftrightarrow t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{aligned}$$

Άρα, οι πιθανές τιμές του α είναι οι

$$17,\ 29,\ 41,\ 53,\ 65,\ 77,\ 89\,.$$

Οι τιμές αυτές είναι όλες δεκτές, αφού ικανοποιούν τις (2).

(ii) Αν $\alpha \equiv 3 \pmod 4$ και $\alpha \equiv 4 \pmod 6$, τότε θα ισχύει

$$\alpha = 4x+3 \quad \text{και} \quad \alpha = 6y+4\,, \quad \text{όπου} \quad x, y \in \mathbf{Z}$$

οπότε θα έχουμε $4x+3=6y+4$ ή, ισοδύναμα,

$$4x-6y=1$$

Η εξίσωση, όμως, αυτή είναι αδύνατη αφού $(4,-6)=2$ και $2 \nmid 1$. Άρα, το πρόβλημα δεν έχει λύση.

5. (i) Επειδή $2^3=8\equiv 1 \pmod 7$ και $100=3\cdot 33+1$, έχουμε

$$2^{100}=2^{3\cdot 33+1}\equiv (2^3)^{33}\cdot 2 \equiv 1^{33}\cdot 2 \equiv 2 \pmod 7)$$

Άρα το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ίσο με 2.

(ii) Επειδή $9\equiv 1 \pmod 8$, έχουμε $9^{100}\equiv 1^{100}\equiv 1 \pmod 8$. Άρα το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ίσο με 1.

(iii) Επειδή $3^3=27\equiv -1 \pmod 7$ και $1998=3\cdot 666$, έχουμε

$$3^{1998}=(3^3)^{666}\equiv (-1)^{666}\equiv 1 \pmod 7$$

Άρα το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ίσο με 1.

(iv) Επειδή $5^2=25\equiv -1 \pmod{26}$ και $2004=2\cdot 1002$, έχουμε

$$5^{2004}=(5^2)^{1002}\equiv (-1)^{1002}\equiv 1 \pmod{26}$$

Άρα το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ίσο με 1.

6. (i) Επειδή $5^2=25\equiv 1 \pmod 8$, έχουμε

$$5^{2\nu}+7=(5^2)^{\nu}+7\equiv 1^{\nu}+7\equiv 1+7\equiv 8\equiv 0 \pmod 8\,.$$

Άρα $8 \mid (5^{2\nu}+7)$.

(ii) Είναι

$$
\begin{aligned}
2^{\nu+1}+3^{3\nu+1} &= 2\cdot 2^{\nu}+3\cdot 27^{\nu}\\
&\equiv 2\cdot 2^{\nu}+3\cdot 2^{\nu}\pmod{5}, \text{ αφού } 27\equiv 2\pmod{5}\\
&\equiv 5\cdot 2^{\nu}\pmod{5}\\
&\equiv 0\pmod{5}.
\end{aligned}
$$

Άρα $5|(2^{\nu+1}+3^{3\nu+1})$.

(iii) Είναι $2^4=16\equiv 1\pmod{15}$. Άρα $2^{4\nu}-1=(2^4)^{\nu}-1\equiv 1^{\nu}-1\equiv 0\pmod{15}$.

(iv) Είναι

$$
\begin{aligned}
2^{2\nu+4}+5^{2\nu+1} &= 16\cdot 4^{\nu}+5\cdot 25^{\nu}\\
&\equiv (-5)\cdot 4^{\nu}+5\cdot 4^{\nu}\pmod{21}, \text{ αφού } \begin{cases}16\equiv -5\pmod{21}\\ 25\equiv 4\pmod{21}\end{cases}\\
&\equiv 0\cdot 4^{\nu}\pmod{21}\\
&\equiv 0\pmod{21}.
\end{aligned}
$$

Άρα $21|(2^{2\nu+4}+5^{2\nu+1})$.

7. (i) Αρκεί να βρούμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 3^{1998} με το 10. Είναι $3^2=9\equiv -1\pmod{10}$ και $1998=2\cdot 999$. Επομένως

$$3^{1998}=(3^2)^{999}\equiv(-1)^{999}\equiv -1\equiv 9\pmod{10}.$$

Άρα το τελευταίο ψηφίο του 3^{1998} είναι το 9.

(ii) Αρκεί να βρούμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 7^{2003} με το 100. Είναι $7^4=2201\equiv 1\pmod{100}$ και $2003=4\cdot 500+3$. Επομένως

$$
\begin{aligned}
7^{2003} &= 7^{4\cdot 500+3}=7^3(7^4)^{500}\\
&\equiv 43\cdot 1^{500}\pmod{100}, \text{ αφού } 7^3=343\equiv 43\pmod{100}\\
&\equiv 43\pmod{100}
\end{aligned}
$$

Άρα, το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού 7^{2003} είναι το 43.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\beta \in \mathbf{Z}$ τέτοιος ώστε $3\alpha - 1 = \beta^2$. Τότε θα ισχύει $\beta^2 \equiv -1 (\bmod 3)$, οπότε

$$\beta^2 \equiv 2 (\bmod 3) \qquad (1)$$

Όμως, $\beta \equiv 0,1,2 (\bmod 3)$, οπότε $\beta^2 \equiv 0,1 (\bmod 3)$, που αντίκειται στην (1).

2. Ο αριθμός p είναι της μορφής $p = 10\kappa + \upsilon$, $\upsilon = 0,1,...,9$. Επειδή, όμως, είναι πρώτος και μεγαλύτερος του 5, θα είναι της μορφής $p = 10\kappa + 1$ ή $p = 10\kappa + 3$ ή $p = 10\kappa + 7$ ή $p = 10\kappa + 9$, $\kappa \in \mathbf{N}$. Επομένως, θα ισχύει $p \equiv 1,3,7,9 (\bmod 10)$ οπότε $p^2 \equiv 1,9 (\bmod 10)$ ή, ισοδύναμα, $p^2 \equiv 1, -1 (\bmod 10)$,

που σημαίνει ότι

$$p^2 - 1 \equiv 0 (\bmod 10) \quad \text{ή} \quad p^2 + 1 \equiv 0 (\bmod 10)$$

και άρα $10 | (p^2 - 1)$ ή $10 | (p^2 + 1)$.

3. **α΄ τρόπος:** Είναι $\alpha^2 + \alpha - 6 = (\alpha + 3)(\alpha - 2)$. Επομένως

$$\begin{aligned}
5 | (\alpha^2 + \alpha - 6) &\Leftrightarrow 5 | (\alpha + 3)(\alpha - 2) \\
&\Leftrightarrow 5 | (\alpha + 3) \quad \text{ή} \quad 5 | (\alpha - 2) \\
&\Leftrightarrow \alpha + 3 = 5\kappa, \ \kappa \in \mathbf{Z} \quad \text{ή} \quad \alpha - 2 = 5\lambda, \ \lambda \in \mathbf{Z} \\
&\Leftrightarrow \alpha = 5\kappa - 3, \ \kappa \in \mathbf{Z} \quad \text{ή} \quad \alpha = 5\lambda + 2, \ \lambda \in \mathbf{Z} \\
&\Leftrightarrow \alpha = 5\lambda + 2, \ \lambda \in \mathbf{Z},
\end{aligned}$$

αφού ο $\alpha = 5\kappa - 3$, $\kappa \in \mathbf{Z}$ γράφεται $\alpha = 5(\kappa - 1) + 2 = 5\lambda + 2$, $\lambda = \kappa - 1$.

β΄ τρόπος: Αν υ είναι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον 5 τότε θα ισχύει $\alpha \equiv \upsilon (\bmod 5)$, οπότε

$$\alpha^2 + \alpha - 6 \equiv \upsilon^2 + \upsilon - 6 (\bmod 5).$$

Επομένως:

- Αν $\upsilon = 0$, τότε $\alpha^2 + \alpha - 6 \equiv -6 \equiv 4 (\bmod 5)$, οπότε $5 \nmid (\alpha^2 + \alpha - 6)$
- Αν $\upsilon = 1$, τότε $\alpha^2 + \alpha - 6 \equiv -4 \equiv 1 (\bmod 5)$, οπότε $5 \nmid (\alpha^2 + \alpha - 6)$

- Αν $\upsilon=2$, τότε $\alpha^2+\alpha-6\equiv0(\bmod 5)$, οπότε $5|(\alpha^2+\alpha-6)$
- Αν $\upsilon=3$, τότε $\alpha^2+\alpha-6\equiv6\equiv1(\bmod 5)$, οπότε $5\nmid(\alpha^2+\alpha-6)$
- Αν $\upsilon=4$, τότε $\alpha^2+\alpha-6\equiv14\equiv4(\bmod 5)$, οπότε $5\nmid(\alpha^2+\alpha-6)$

Άρα, ισχύει $5|(\alpha^2+\alpha-6)$ μόνο όταν $\alpha\equiv2(\bmod 5)$, δηλαδή, μόνο όταν ο α είναι της μορφής $\alpha=5\lambda+2,\ \lambda\in\mathbf{Z}$.

4. **α΄ τρόπος:** Επειδή $x\equiv1(\bmod 2)$ και $x\equiv2(\bmod 3)$, θα ισχύει

$$x+1\equiv2\equiv0(\bmod 2) \quad \text{και} \quad x+1\equiv0(\bmod 3).$$

Επομένως, $2|(x+1)$ και $3|(x+1)$, οπότε $2\cdot3|(x+1)$, αφού $(2,3)=1$. Άρα $6|(x+1)$, οπότε $x+1=6\kappa$, $\kappa\in\mathbf{Z}$ και συνεπώς $x\equiv6\kappa-1,\ \kappa\in\mathbf{Z}$.

β΄ τρόπος: (Βλέπε άσκηση 4(i) Α΄ Ομάδας).

5. (i) **α΄ τρόπος:** Αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha^3-\alpha\equiv0(\bmod 6)$. Πράγματι, επειδή $\alpha\equiv\upsilon(\bmod 6)$, $\upsilon=0,1,2,3,4,5,6$, έχουμε

$$\alpha^3-\alpha\equiv\upsilon^3-\upsilon(\bmod 6)$$

Επομένως:

— Αν $\upsilon=0$, τότε $\alpha^3-a\equiv0(\bmod 6)$

— Αν $\upsilon=1$, τότε $\alpha^3-a\equiv0(\bmod 6)$

— Αν $\upsilon=2$, τότε $\alpha^3-a\equiv6\equiv0(\bmod 6)$

— Αν $\upsilon=3$, τότε $\alpha^3-a\equiv24\equiv0(\bmod 6)$

— Αν $\upsilon=4$, τότε $\alpha^3-a\equiv60\equiv0(\bmod 6)$

— Αν $\upsilon=5$, τότε $\alpha^3-a\equiv120\equiv0(\bmod 6)$

Σε όλες τις περιπτώσεις είναι $\alpha^3-\alpha\equiv0(\bmod 6)$.

β΄ τρόπος: Αρκεί να δείξουμε ότι $6|(\alpha^3-\alpha)$. Επειδή $6=2\cdot3$ και $(2,3)=1$, αρκεί να δείξουμε ότι $2|(\alpha^3-\alpha)$ και $3|(\alpha^3-\alpha)$, που αποδεικνύεται εύκολα.

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $10|(\alpha^5-\alpha)$. Επειδή $10=2\cdot5$ και $(2,5)=1$, αρκεί να δείξουμε ότι $2|(\alpha^5-\alpha)$ και $5|(\alpha^5-\alpha)$. Πράγματι

- Επειδή $\alpha \equiv \upsilon (\bmod 2)$, όπου $\upsilon = 0,1$, θα ισχύει $\alpha^5 - \alpha \equiv \upsilon^5 - \upsilon \equiv 0 (\bmod 2)$.Άρα $2 | (\alpha^5 - \alpha)$, οπότε

— Αν $\upsilon = 0$, τότε $\alpha^5 - a \equiv 0 (\bmod 2)$

— Αν $\upsilon = 1$, τότε $\alpha^5 - a \equiv 0 (\bmod 2)$

- Επειδή $\alpha \equiv \upsilon (\bmod 5)$, όπου $\upsilon = 0,1,2,3,4$, θα ισχύει $\alpha^5 - \alpha \equiv \upsilon^5 - \upsilon \equiv 0 (\bmod 5)$

Επομένως:

— Αν $\upsilon = 0$, τότε $\alpha^5 - a \equiv 0 (\bmod 5)$

— Αν $\upsilon = 1$, τότε $\alpha^5 - a \equiv 0 (\bmod 5)$

— Αν $\upsilon = 2$, τότε $\alpha^5 - a \equiv 30 \equiv 0 (\bmod 5)$

— Αν $\upsilon = 3$, τότε $\alpha^5 - a \equiv 240 \equiv 0 (\bmod 5)$

— Αν $\upsilon = 4$, τότε $\alpha^4 - a \equiv 1020 \equiv 0 (\bmod 5)$

Σε όλες τις περιπτώσεις είναι $\alpha^5 - a \equiv 0 (\bmod 5)$, οπότε $5 | (\alpha^5 - \alpha)$.

6. (i) Έχουμε

$$\begin{cases} \alpha \equiv \beta (\bmod m) \\ n | m \end{cases}, \quad \text{οπότε} \quad \begin{cases} m | (\alpha - \beta) \\ n | m \end{cases}.$$

Άρα $n | (\alpha - \beta)$, συνεπώς $\alpha \equiv \beta (\bmod n)$.

(ii) Έχουμε

$$\begin{cases} n\alpha \equiv n\beta (\bmod m) \\ (m,n) = 1 \end{cases}, \quad \text{οπότε} \quad \begin{cases} m | n(\alpha - \beta) \\ (m,n) = 1 \end{cases}.$$

Άρα $m | (\alpha - \beta)$, οπότε $\alpha \equiv \beta (\bmod m)$.

7. Επειδή $\alpha \equiv \beta (\bmod m)$, θα ισχύει

$$\alpha \equiv \lambda m + \beta , \quad \text{όπου} \quad \lambda \in \mathbf{Z} .$$

Επομένως

$$(\alpha, m) = (\lambda m + \beta, m) = (\lambda m + \beta - \lambda m,\ m) = (\beta, m) .$$

8. (i) Επειδή $39=3\cdot 13$ και $(3,13)=1$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$3|(53^{103}+103^{53}) \quad \text{και} \quad 13|(53^{103}+103^{53}).$$

Πράγματι

- Επειδή $53=3\cdot 18-1$ και $103=3\cdot 34+1$, έχουμε

$$53\equiv -1(\text{mod}3) \quad \text{και} \quad 103\equiv 1(\text{mod}3)$$

οπότε $53^{103}+103^{53}\equiv(-1)^{103}+1^{53}\equiv 0(\text{mod}3)$. Άρα $3|(53^{103}+103^{53})$.

- Επειδή $53=13\cdot 4+1$ και $103=13\cdot 8-1$, έχουμε

$$53\equiv 1(\text{mod}13) \quad \text{και} \quad 103\equiv -1(\text{mod}13)$$

οπότε $53^{103}+103^{53}\equiv 1^{103}+(-1)^{53}\equiv 0(\text{mod}13)$. Άρα $13|(53^{103}+103^{53})$.

(ii) Επειδή $111=7\cdot 16-1$ και $333\equiv 7\cdot 47+4$, έχουμε

$$111\equiv -1(\text{mod}7) \quad \text{και} \quad 333\equiv 4(\text{mod}7)$$

οπότε

$$\begin{aligned}111^{333}+333^{111}&\equiv(-1)^{333}+4^{111}(\text{mod}7)\\&\equiv -1+(4^3)^{37}(\text{mod}7)\\&\equiv -1+64^{37}(\text{mod}7)\\&\equiv -1+1^{37}(\text{mod}7), \quad \text{γιατί} \quad 64\equiv 1(\text{mod}7)\\&\equiv -1+1(\text{mod}7)\\&\equiv 0(\text{mod}7).\end{aligned}$$

Άρα $7|(111^{333}+333^{111})$.

9. Επειδή $\alpha\equiv\upsilon(\text{mod}5)$, όπου $\upsilon=0,1,2,3,4$, έχουμε $\alpha^2\equiv\upsilon^2(\text{mod}5)$, οπότε

$$\alpha^2=0,1,4(\text{mod}5) \qquad (1)$$

- Άν υποθέτουμε ότι $\sqrt{5\nu+2}\in Q$, τότε θα ισχύει

$$5\nu+2=\alpha^2, \quad \text{όπου} \quad \alpha\in\mathbf{N}^*$$

οπότε $\alpha^2\equiv 2(\text{mod}5)$, που είναι άτοπο, λόγω της (1).

- Άν υποθέτουμε ότι $\sqrt{5\nu+3}\in Q$, τότε θα ισχύει

$$5\nu+3=\alpha^2, \quad \text{όπου} \quad \alpha\in\mathbf{N}^*$$

οπότε $\alpha^2\equiv 3(\mathrm{mod}5)$, που είναι άτοπο, λόγω της (1).

10. Επειδή ο p είναι πρώτος και μεγαλύτερος του 3, θα έχει μία από τις παρακάτω μορφές:

$$p=3\kappa+1,\ \ \kappa\in\mathbf{N}^* \quad \text{ή} \quad p=3\kappa+2,\ \ \kappa\in\mathbf{N}^*,$$

οπότε θα ισχύει

$$p\equiv 1(\mathrm{mod}3) \quad \text{ή} \quad p\equiv 2(\mathrm{mod}3).$$

Έτσι, θα έχουμε

$$p^2\equiv 1^2\equiv 1(\mathrm{mod}3) \quad \text{ή} \quad p^2\equiv 2^2\equiv 1(\mathrm{mod}3).$$

Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις είναι $p^2\equiv 1(\mathrm{mod}3)$. Επομένως:

- Έχουμε $p^2+2\equiv 1+2\equiv 0(\mathrm{mod}3)$, οπότε $p^2+2=\pi o\lambda 3$. Άρα ο p^2+2 είναι σύνθετος, αφού είναι πολλαπλάσιο του 3 και δεν είναι ίσος με 3.

- Έχουμε $p_1^2+p_2^2+p_3^2\equiv 1+1+1\equiv 0(\mathrm{mod}3)$, οπότε $p_1^2+p_2^2+p_3^3=\pi o\lambda 3$. Άρα ο $p_1^2+p_2^2+p_3^2$ είναι σύνθετος, αφού είναι πολλαπλάσιο του 3 και δεν είναι ίσος με 3.

11. Επειδή $24=3\cdot 8$ και $(3,8)=1$, αρκεί να δείξουμε ότι $8|(p^2-q^2)$ και $3|(p^2-q^2)$.

- Σύμφωνα με την εφαρμογή 2 της §1.2, επειδή οι p, q είναι περιττοί τα τετράγωνά τους θα είναι της μορφής

$$p^2=8\kappa+1,\ \ \kappa\in\mathbf{N}^* \quad \text{και} \quad q^2=8\lambda+1,\ \ \lambda\in\mathbf{N}^*.$$

Επομένως, θα ισχύει $p^2\equiv 1(\mathrm{mod}8)$ και $q^2\equiv 1(\mathrm{mod}8)$, οπότε θα έχουμε $p^2-q^2\equiv 0(\mathrm{mod}8)$ και άρα $8|(p^2-q^2)$.

- Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, επειδή οι p, q είναι πρώτοι και μεγαλύτεροι του 3, θα ισχύει $p^2\equiv 1(\mathrm{mod}3)$ και $q^2\equiv 1(\mathrm{mod}3)$, οπότε θα έχουμε

$$p^2-q^2\equiv 0(\mathrm{mod}3) \quad \text{και άρα} \quad 3|(p^2-q^2).$$

12. • Επειδή $77\equiv 7(\mathrm{mod}10)$, έχουμε

$$77^{77}\equiv 7^{77}(\mathrm{mod}10).$$

Όμως $7^2=49\equiv -1(\mathrm{mod}10)$ και $77=2\cdot 38+1$. Επομένως

$$7^{77}=7(7^2)^{38}\equiv 7(-1)^{38}\equiv 7(\mathrm{mod}10)$$

οπότε $\quad 77^{77}\equiv 7(\mathrm{mod}10)$.

Άρα, το ψηφίο των μονάδων του 77^{77} είναι το 7.

• Επειδή $333\equiv 3(\mathrm{mod}10)$, έχουμε

$$333^{333}\equiv 3^{333}(\mathrm{mod}10).$$

Όμως $3^2=9\equiv -1(\mathrm{mod}10)$ και $333=2\cdot 166+1$. Επομένως

$$3^{333}=3(3^2)^{166}\equiv 3(-1)^{166}\equiv 3(\mathrm{mod}10)$$

οπότε $\quad 333^{333}\equiv 3(\mathrm{mod}10)$.

Άρα, το ψηφίο των μονάδων του 333^{333} είναι το 3.

13. Επειδή $2\equiv -1(\mathrm{mod}3)$, έχουμε

$$\begin{aligned}2^{1999}+2^{1997}-1&\equiv(-1)^{1999}+(-1)^{1997}-1(\mathrm{mod}3)\\&\equiv -1-1-1(\mathrm{mod}3)\\&\equiv -3\equiv 0(\mathrm{mod}3)\end{aligned}$$

Άρα $2^{1999}+2^{1997}-1=\piολ3$ και επειδή $2^{1999}+2^{1997}-1>3$, ο αριθμός $2^{1999}+2^{1997}-1$ είναι σύνθετος.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Έστω $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, ..., \alpha+(\nu-1)$, ν-διαδοχικοί ακέραιοι. Θα αποδείξουμε ότι ακριβώς ένας από αυτούς είναι πολλαπλάσιο του ν. Έστω $\alpha=\kappa\nu+\upsilon$, $0\leq\upsilon<\nu$ η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον ν.

— Αν $\upsilon=0$, τότε ο α είναι πολλαπλάσιο του ν, αφού $\alpha=\kappa\nu$

— Αν $\upsilon\neq 0$, τότε ο $\alpha+(\nu-\upsilon)$ είναι πολλαπλάσιο του ν, αφού

$$\alpha+(\nu-\upsilon)=\kappa\nu+\upsilon+\nu-\upsilon=(\kappa+1)\nu .$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση, ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, ..., \alpha+(\nu-1)$ είναι πολλαπλάσιο του ν. Θα δείξουμε τώρα ότι ακριβώς ένας είναι πολλαπλάσιο του ν. Ας υποθέσουμε ότι δύο τουλάχιστον από τους παραπάνω αριθμούς είναι πολλαπλάσια του ν, για παράδειγμα οι

$$\alpha+\kappa \quad \text{και} \quad \alpha+\lambda, \quad \text{όπου} \quad 0\leq\kappa<\lambda\leq\nu-1 .$$

Τότε $\nu|(\alpha+\lambda)$ και $\nu|(\alpha+\kappa)$, οπότε $\nu|[(\alpha+\lambda)-(\alpha+\kappa)]$, δηλαδή $\nu|(\lambda-\kappa)$, που είναι άτοπο, αφού $0<\lambda-\kappa<\nu$.

2. Επειδή $\dfrac{\alpha+2}{8}=\dfrac{\beta+3}{6}$, έχουμε $6(\alpha+2)=8(\beta+3)$, οπότε $3(\alpha+2)=4(\beta+3)$ (1)

Άρα $3|4(\beta+3)$, οπότε $3|(\beta+3)$ και άρα $3|\beta$. Επομένως, $\beta=3\kappa$, $\kappa\in\mathbf{N}^*$, οπότε από την (1) βρίσκουμε ότι $\alpha=4\kappa+2$, $\kappa\in\mathbf{N}^*$. Έχουμε δηλαδή

$$\alpha=4\kappa+2 \quad \text{και} \quad \beta=3\kappa, \quad \kappa\in\mathbf{N}^* \qquad (1)$$

οπότε η αρχική σχέση γράφεται $\dfrac{\kappa+1}{2}=\dfrac{10}{\gamma+4}$ ή ισοδύναμα

$$(\kappa+1)(\gamma+4)=20 . \qquad (2)$$

Επειδή $\kappa\geq 1$ και $\gamma\geq 1$ θα είναι $\kappa+1\geq 2$ και $\gamma+4\geq 5$, οπότε λόγω της (2), θα έχουμε:

$$\begin{cases}\kappa+1=2\\ \gamma+4=10\end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases}\kappa+1=4\\ \gamma+4=5\end{cases}.$$

Άρα

$$\begin{cases}\kappa=1\\ \gamma=6\end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases}\kappa=3\\ \gamma=1\end{cases}$$

οπότε, λόγω της (1), έχουμε

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(6,3,6) \quad \text{ή} \quad (\alpha,\beta,\gamma)=(14,9,1) .$$

3. Οι ν-διαδοχικοί περιττοί φυσικοί είναι της μορφής:

$$\alpha, \alpha+2, \alpha+4, ..., \alpha+2(\nu-1), \quad \text{όπου } \alpha \text{ περιττός φυσικός.}$$

Επομένως, το άθροισμά τους S θα είναι ίσο με

$$\begin{aligned} S &= \alpha+(\alpha+2)+(\alpha+4)+\ldots+(\alpha+2(\nu-1)) \\ &= \frac{[\alpha+(\alpha+2(\nu-1))]\nu}{2} \\ &= (\alpha+(\nu-1))\nu \end{aligned}$$

Επειδή $\nu>1$ και $\alpha+\nu-1>1$ (αφού $\alpha\geq 1$ και $\nu\geq 2$), ο αριθμός $S=\nu(\alpha+\nu-1)$ είναι σύνθετος.

4. (i) Ας υποθέσουμε ότι $(\alpha^2+\beta^2,\alpha\beta)\neq 1$. Τότε ο $(\alpha^2+\beta^2,\alpha\beta)$ θα έχει έναν τουλάχιστον θετικό πρώτο διαιρέτη p, οπότε θα ισχύει

$$\begin{cases} p|(\alpha^2+\beta^2) \\ p|\alpha\beta \end{cases} \text{ και άρα θα έχουμε } \begin{cases} p|(\alpha^2+\beta^2) \\ p|\alpha \text{ ή } p|\beta \end{cases}.$$

— Αν $p|\alpha$, επειδή $p|(\alpha^2+\beta^2)$, θα ισχύει $p|\beta^2$, οπότε $p|\beta$. Έτσι $p|\alpha$ και $p|\beta$, οπότε $p|(\alpha,\beta)$, δηλαδή $p|1$, άτοπο.

— Αν $p|\beta$, τότε και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα $(\alpha^2+\beta^2,\alpha\beta)=1$.

(ii) Αν υποθέσουμε ότι $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\nu\in\mathbf{N}^*$, τότε θα ισχύει

$$\alpha^2+\beta^2=\nu\alpha\beta \tag{1}$$

Επειδή $(\alpha,\beta)=1$, σύμφωνα με το ερώτημα (i), έχουμε

$$1=(\alpha^2+\beta^2,\alpha\beta)\overset{(1)}{=}(\nu\alpha\beta,\alpha\beta)=\alpha\beta(\nu,1)=\alpha\beta.$$

Άρα $\alpha\beta=1$, με $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^*$, οπότε $\alpha=\beta=1$, που είναι άτοπο, αφού $\alpha\neq\beta$.

5. (i) • Ας υποθέσουμε ότι $(\alpha+\beta,\alpha\beta)\neq 1$. Τότε ο $(\alpha+\beta,\alpha\beta)$ θα έχει έναν τουλάχιστον θετικό πρώτο διαιρέτη p, οπότε θα ισχύει

$$\begin{cases} p|(\alpha+\beta) \\ p|\alpha\beta \end{cases} \text{ και άρα θα έχουμε } \begin{cases} p|(\alpha+\beta) \\ p|\alpha \text{ ή } p|\beta \end{cases}.$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση $\begin{cases} p|\alpha \\ p|\beta \end{cases}$, οπότε $p|(\alpha,\beta)$, δηλαδή $p|1$, που είναι άτοπο.

• Έστω $(\alpha,\beta)=\delta$. Τότε $\left(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta}\right)=1$, οπότε, αν θέσουμε $\frac{\alpha}{\delta}=A$ και $\frac{\beta}{\delta}=B$, έχουμε

$$\alpha=\delta A\,,\quad \beta=\delta B\,,\quad \text{με } (A,B)=1\,. \qquad (1)$$

Επομένως $[\alpha,\beta]=\frac{\alpha\beta}{\delta}=\frac{\delta A\delta B}{\delta}=\delta AB$, οπότε

$$(\alpha+\beta,[\alpha,\beta])=(\delta A+\delta B,\delta AB)=\delta(A+B,AB)\overset{(1)}{=}\delta\cdot 1=\delta=(\alpha,\beta)\,.$$

(ii) Σύμφωνα με το (i) έχουμε

$$(\alpha,\beta)=(\alpha+\beta,[\alpha,\beta])=(114,360)=6$$

οπότε

$$\alpha\beta=(\alpha,\beta)[\alpha,\beta]=6\cdot 360=2160\,.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\alpha+\beta=114 \quad \text{και} \quad \alpha\beta=2160\,.$$

Άρα ($\alpha=90$ και $\beta=24$) ή ($\alpha=24$ και $\beta=90$).

6. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $\kappa,\lambda,\kappa',\lambda'\in\mathbf{N}^*$ τέτοιοι ώστε

$$\kappa p+\lambda q=\kappa' p+\lambda' q\,,\quad \text{με}\quad 1\le\kappa,\kappa'\le q \quad \text{και} \quad 1\le\lambda,\lambda'\le p\,.$$

Τότε θα ισχύει

$$(\kappa-\kappa')p=(\lambda'-\lambda)q \qquad (1)$$

Άρα $p|(\lambda'-\lambda)q$ και επειδή $(p,q)=1$, έχουμε $p|(\lambda'-\lambda)$. Όμως $\begin{cases}0<\lambda'\le p\\ 0<\lambda\le p\end{cases}$, οπότε $\begin{cases}0<\lambda'\le p\\ -p\le-\lambda<0\end{cases}$. Επομένως $-p<\lambda'-\lambda<p$, οπότε $\lambda'-\lambda=0$. Άρα $\lambda'=\lambda$ και, λόγω της (1), $\kappa'=\kappa$.

7. (i) Έστω $P(\nu)$ η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Η ανισότητα αληθεύει για $\nu=3$, αφού $2^3>2\cdot 3$.

- Θα αποδείξουμε ότι, αν η $P(\nu)$ είναι αληθής, θα είναι αληθής και η $P(\nu+1)$, δηλαδή ότι:

Αν $2^{\nu} > 2\nu$ (1), τότε και $2^{\nu+1} > 2(\nu+1)$.

Πράγματι, λόγω της (1), έχουμε

$$2 \cdot 2^{\nu} > 2 \cdot 2\nu$$
$$2^{\nu+1} > 4\nu$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $4\nu > 2(\nu+1)$ για κάθε $\nu \geq 3$. Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned} 4\nu > 2(\nu+1) &\Leftrightarrow 4\nu > 2\nu + 2 \\ &\Leftrightarrow 2\nu > 2 \\ &\Leftrightarrow \nu > 1 \end{aligned}$$

που ισχύει, αφού $\nu \geq 3$.

Άρα, η ανισότητα $P(\nu)$ αληθεύει για κάθε $\nu \geq 3$.

(ii) Αν $x = \alpha$ είναι μια θετική ακέραια λύση της εξίσωσης, τότε θα ισχύει

$$2^{\alpha} = \alpha^2 \qquad (1)$$

Επομένως, ο α θα έχει ως μοναδικό πρώτο διαιρέτη τον 2, συνεπώς θα είναι της μορφής $\alpha = 2^{\kappa}$, $\kappa \in \mathbf{N}^*$. Έτσι η (1) γράφεται

$$2^{2^{\kappa}} = (2^{\kappa})^2 \Leftrightarrow 2^{2^{\kappa}} = 2^{2\kappa} \Leftrightarrow 2^{\kappa} = 2\kappa .$$

Έτσι, λόγω της (1), πρέπει $\kappa < 3$. Επομένως, οι πιθανές τιμές του κ είναι οι $\kappa = 1$ ή $\kappa = 2$.

— Για $\kappa = 1$, έχουμε $\alpha = 2$, που είναι λύση της εξίσωσης

— Για $\kappa = 2$, έχουμε $\alpha = 4$, που είναι και αυτή λύση της εξίσωσης.

Άρα, οι μοναδικές θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $2^x = x^2$ είναι οι 2 και 4.

8. (i) Έχουμε

$$\alpha^{\nu} - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2} + \ldots + \alpha + 1) .$$

Επειδή ο $\alpha^{\nu} - 1$ είναι πρώτος και $\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2} + \ldots + \alpha + 1 > 1$ (αφού $\nu \geq 2$), πρέπει $\alpha - 1 = 1$, δηλαδή πρέπει $\alpha = 2$. Άρα $\alpha^{\nu} - 1 = 2^{\nu} - 1$.

Αν, τώρα, υποθέσουμε ότι ο ν είναι σύνθετος, τότε αυτός παίρνει τη μορφή

$\nu = \kappa \cdot \lambda$, όπου κ, λ φυσικοί μεγαλύτεροι του 1.

Έτσι, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha^{\nu}-1 &= 2^{\nu}-1=(2^{\lambda})^{\kappa}-1 \\ &= \beta^{\kappa}-1\,, \qquad \text{όπου } \beta=2^{\lambda}>2 \\ &= (\beta-1)(\beta^{\kappa-1}+\beta^{\kappa-2}+\ldots+\beta+1)\,. \end{aligned}$$

Επειδή $\beta-1=2^{\lambda}-1>1$ και $\beta^{\kappa-1}+\ldots+\beta+1>0$, (αφού $\kappa>1$) η ισότητα $\alpha^{\nu}-1=(\beta-1)(\beta^{\kappa-1}+\ldots+\beta+1)$ δηλώνει ότι ο $\alpha^{\nu}-1$ είναι σύνθετος, που είναι άτοπο.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι $\nu\neq 2^{\kappa}$. Τότε ο ν θα είναι της μορφής

$\nu=2^{\kappa}\cdot\lambda$, όπου $\kappa, \lambda\in\mathbf{N}$ και λ περιττός μεγαλύτερος του 1.

Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha^{\nu}+1 &= (\alpha^{2^{\kappa}})^{\lambda}+1 \\ &= \beta^{\lambda}+1, \qquad \text{όπου } \beta=\alpha^{2^{\kappa}} \\ &= (\beta+1)(\beta^{\lambda-1}-\beta^{\lambda-2}+\ldots-\beta+1)\,, \quad \text{επειδή } \lambda \text{ περιττός.} \end{aligned}$$

Άρα ο $\alpha^{\nu}+1$ έχει ως παράγοντα τον $\beta+1=\alpha^{2^{\kappa}}+1$, για τον οποίο ισχύει

$$1<\alpha^{2^{\kappa}}+1<\alpha^{\nu}+1, \quad \text{αφού} \quad \nu=2^{\kappa}\lambda>2^{\kappa} \quad \text{και} \quad \alpha>1\,.$$

Επομένως, ο $\alpha^{\nu}+1$ είναι σύνθετος, που είναι άτοπο.

9. (i) Είναι $\alpha\equiv 0,1,2,3,4,5,6,7 (\bmod 8)$.

Επομένως $\alpha^2\equiv 0^2,1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,6^2,7^2 (\bmod 8)$, οπότε $\alpha^2\equiv 0,1,4 (\bmod 8)$.

(ii) Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ακέραια λύση (α,β), τότε θα ισχύει

$$\alpha^2+\beta^2=1998 \qquad (1)$$

Όμως, λόγω της (i), είναι

$$\alpha^2\equiv 0,1,4 (\bmod 8) \quad \text{και} \quad \beta^2\equiv 0,1,4 (\bmod 8)\,.$$

Άρα, θα έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2\equiv 0,1,2,4,5 (\bmod 8)$$

οπότε, λόγω της (1) θα είναι

$$1998 \equiv 0,1,2,4,5 (\bmod 8) \qquad (2)$$

Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του 1998 με το 8 είναι ίσο με 6, έχουμε $1998 \equiv 6(\bmod 8)$, που αντίκειται στην (2). Άρα η εξίσωση $x^2 + y^2 = 1998$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.

10. (i) • Επειδή $9 = 4 \cdot 2 + 1$, είναι $9 \equiv 1(\bmod 4)$, οπότε $9^{10} \equiv 1^4 \equiv 1(\bmod 4)$ και άρα

$$4 | (9^{10} - 1) \qquad (1)$$

• Έχουμε

$$9^1 \equiv 9(\bmod 25), \quad 9^2 \equiv 81 \equiv 6(\bmod 25), \quad 9^3 \equiv 6 \cdot 9 \equiv 4(\bmod 25)$$

$$9^4 \equiv 4 \cdot 9 \equiv 11(\bmod 25), \quad 9^5 \equiv 99 \equiv -1(\bmod 25).$$

Άρα $9^{10} \equiv (9^5)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1(\bmod 25)$, οπότε

$$25 | (9^{10} - 1) \qquad (2)$$

• Επειδή $(4,25) = 1$, λόγω των (1) και (2), έχουμε

$$4 \cdot 25 | (9^{10} - 1) \Leftrightarrow 100 | (9^{10} - 1) \Leftrightarrow 9^{10} \equiv 1(\bmod 100)$$

(ii) Επειδή $2002 = 10 \cdot 200 + 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} 9^{2002} &= 9^2 (9^{10})^{200} = 81 (9^{10})^{200} \\ &\equiv 81 \cdot 1^{200} (\bmod 100), \quad \text{αφού } 9^{10} \equiv 1(\bmod 100) \\ &\equiv 81(\bmod 100). \end{aligned}$$

Άρα, το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού 9^{2002} είναι το 81.

11. (i) Αρκεί ο αριθμός $\dfrac{2\nu}{\nu - 2}$ να είναι ακέραιος. Όμως έχουμε:

$$\frac{2\nu}{\nu - 2} = \frac{2(\nu - 2) + 4}{\nu - 2} = 2 + \frac{4}{\nu - 2}.$$

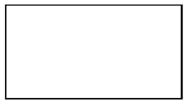
Επομένως, αρκεί ο $\dfrac{4}{\nu - 2}$ να είναι ακέραιος, που συμβαίνει, αν και μόνο αν $(\nu - 2) | 4$ ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν $\nu - 2 = 1$ ή $\nu - 2 = 2$ ή $\nu - 2 = 4$, δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\nu = 3 \quad \text{ή} \quad \nu = 4 \quad \text{ή} \quad \nu = 6.$$

y

x

(ii) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός από ζητούμενα ορθογώνια, τότε θα ισχύει



$$xy = 2x + 2y \Leftrightarrow xy - 2x = 2y \Leftrightarrow x(y-2) = 2y \qquad (1)$$

Άρα $(y-2) | 2y$, οπότε, λόγω της (i) , θα είναι $y=3$ ή $y=4$ ή $y=6$. Επομένως, λόγω της (1), τα ζητούμενα ορθογώνια έχουν διαστάσεις:

$$(6,\ 3)\ ,\quad (4,\ 4)\quad \text{και}\quad (3,\ 6)\ .$$

(iii) Επειδή η γωνία α καθενός από τα κανονικά ν-γωνα είναι ίση $\frac{\nu-2}{\nu}\cdot 180^0$, αν ο χώρος γύρω από το A καλυφθεί με κ κανονικά ν-γωνα, τότε θα ισχύει

$$\kappa\left(\frac{\nu-2}{\nu}\cdot 180^0\right) = 360^0 \Leftrightarrow \kappa = \frac{2\nu}{\nu-2}\ .$$

Έτσι, ο αριθμός $\frac{2\nu}{\nu-2}$ θα είναι ακέραιος, οπότε, λόγω της (1), θα είναι $\nu=3$ ή $\nu=4$ ή $\nu=6$. Άρα, ο χώρος γύρω από το A μπορεί να καλυφθεί μόνο με 3 ισόπλευρα τρίγωνα ή με 4 τετράγωνα ή με 6 κανονικά εξάγωνα.

12. Έστω x η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου και y η πλευρά του μικρού τετραγώνου που είναι διαφορετική της μονάδας. Τότε θα ισχύει

$$x^2 = y^2 + 24\cdot 1^2$$

οπότε

$$(x-y)(x+y) = 24 \qquad (1)$$

Όμως ισχύει $0 < x-y < x+y$. Επομένως, έχουμε

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=24 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x-y=2 \\ x+y=12 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=8 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x-y=4 \\ x+y=6 \end{cases}$$

και επειδή οι x, y είναι ακέραιοι με $y>1$, είναι μόνο $\begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$.

Άρα το ζητούμενο τετράγωνο έχει πλευρά 7, οπότε το εμβαδόν του είναι 49, και χωρίζεται σε 25 τετράγωνα από τα οποία τα 24 έχουν πλευρά 1 και το ένα πλευρά 5.

13. Ας υποθέσουμε ότι $\overline{x_1 y_1}$, $\overline{x_2 y_2}, ..., \overline{x_\kappa y_\kappa}$ είναι οι διψήφιοι και $z_1, z_2, ..., z_\lambda$ οι μονοψήφιοι από τους ζητούμενους αριθμούς. Τότε θα ισχύει:

$$\overline{x_1 y_1} + \overline{x_2 y_2} + ... + \overline{x_\kappa y_\kappa} + z_1 + z_2 + ... + z_\lambda = 100$$

οπότε

$$(10x_1+y_1)+(10x_2+y_2)+...+(10x_\kappa+y_\kappa)+(z_1+z_2+...+z_\lambda)=100 .$$

Άρα

$$10(x_1+x_2+...+x_\kappa)+(y_1+y_2+...+y_\kappa+z_1+z_2+...+z_\lambda)=100 \qquad (1)$$

Επειδή οι ακέραιοι $x_1,x_2,...,x_\kappa,y_1,y_2,...,y_\kappa,z_1,z_2,...,z_\lambda$ είναι τα ψηφία $0,1,2,...,9$, αλλά μόνο μια φορά, το άθροισμά τους θα είναι ίσο με $0+1+2+...+9=45$. Επομένως, αν το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων είναι ίσο με S, τότε το άθροισμα των ψηφίων των μονάδων θα είναι ίσο με $45-S$. Έτσι, η ισότητα (1) γράφεται $10S+45-S=100$, οπότε $9S=100$ και άρα $S=\frac{100}{9}\notin \mathbf{Z}$ άτοπο. Επομένως, το πρόβλημα δεν έχει λύση.

14. (i) Επειδή $(\alpha,\beta)=2$, έχουμε $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)=1$, οπότε, αν θέσουμε $A=\frac{\alpha}{2}$ και $B=\frac{\beta}{2}$, θα ισχύει

$$\alpha=2A \quad \text{και} \quad \beta=2B, \quad \text{με} \quad (A,B)=1 \quad \text{και} \quad A>B>0 \qquad (1)$$

Επομένως, η σχέση $\alpha+\beta=10$ γράφεται:

$$2A+2B=10 \Leftrightarrow A+B=5 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A=4 \\ B=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases}.$$

Άρα
$$\begin{cases} \alpha=8 \\ \beta=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha=6 \\ \beta=4 \end{cases}.$$

(ii) Επειδή $(\alpha,\beta)=4$, έχουμε $\left(\frac{\alpha}{4},\frac{\beta}{4}\right)=1$, οπότε, αν θέσουμε $A=\frac{\alpha}{4}$ και $B=\frac{\beta}{4}$, θα ισχύει

$$a=4A \quad \text{και} \quad \beta=4B, \quad \text{με} \quad (A,B)=1 \quad \text{και} \quad A>B>0 \qquad (2)$$

Επομένως, η σχέση $\alpha\beta=96$ γράφεται

$$4A\cdot 4B=96 \Leftrightarrow AB=6 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A=6 \\ B=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases}.$$

Άρα $\begin{cases}\alpha=24\\ \beta=4\end{cases}$ ή $\begin{cases}\alpha=12\\ \beta=8\end{cases}$.

(iii) Επειδή $(\alpha,\beta)[\alpha,\beta]=\alpha\beta$, λόγω της υπόθεσης, έχουμε $(\alpha,\beta)\cdot 24=96$, οπότε $(\alpha,\beta)=4$. Έτσι $\alpha\beta=96$ και $(\alpha,\beta)=4$, οπότε αναγόμαστε στην (ii) περίπτωση.

(iv) Επειδή $(\alpha,\beta)[\alpha,\beta]=\alpha\beta$, λόγω της υπόθεσης έχουμε $4\cdot 24=\alpha\beta$. Έτσι $\alpha\beta=96$ και $(\alpha,\beta)=4$, οπότε αναγόμαστε στην (ii) περίπτωση.

(v) Έστω $(\alpha,\beta)=\delta$. Τότε $\alpha+\beta=7\delta$, οπότε $\dfrac{\alpha}{\delta}+\dfrac{\beta}{\delta}=7$ με $\left(\dfrac{\alpha}{\delta},\dfrac{\beta}{\delta}\right)=1$. Αν θέσουμε $A=\dfrac{\alpha}{\delta}\in\mathbf{Z}$ και $B=\dfrac{\beta}{\delta}\in\mathbf{Z}$, τότε έχουμε

$$\begin{cases}\alpha=\delta A\\ \beta=\delta B\end{cases} \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \begin{cases}A+B=7\\ (A,B)=1, \ \text{με} \ A>B>0\end{cases} \quad (4)$$

Έτσι $\begin{cases}A=6\\ B=1\end{cases}$ ή $\begin{cases}A=5\\ B=2\end{cases}$ ή $\begin{cases}A=4\\ B=3\end{cases}$.

- Αν $A=6$ και $B=1$, τότε $\alpha=6\delta$ και $\beta=\delta$, οπότε η σχέση $[\alpha,\beta]=60$ γράφεται:

$$[6\delta,\delta]=60\Leftrightarrow\delta[6,1]=60\Leftrightarrow\delta\cdot 6=60\Leftrightarrow\delta=10$$

και συνεπώς $\alpha=60$ και $\beta=10$.

- Αν $A=5$ και $B=2$, τότε $\alpha=5\delta$ και $\beta=2\delta$, οπότε η σχέση $[\alpha,\beta]=60$ γράφεται:

$$[5\delta,2\delta]=60\Leftrightarrow\delta[5,2]=60\Leftrightarrow\delta\cdot 10=60\Leftrightarrow\delta=6$$

και συνεπώς $\alpha=30$ και $\beta=12$.

- Αν $A=4$ και $B=3$, τότε $\alpha=4\delta$ και $\beta=3\delta$, οπότε η σχέση $[\alpha,\beta]=60$ γράφεται:

$$[4\delta,3\delta]=60\Leftrightarrow\delta[4,3]=60\Leftrightarrow\delta\cdot 12=60\Leftrightarrow\delta=5$$

και συνεπώς $\alpha=20$ και $\beta=15$.

15. Αν $p_1,p_2,...,p_\kappa$ είναι οι κοινοί και μη κοινοί θετικοί πρώτοι παράγοντες των α και β, τότε θα ισχύει

$$\alpha = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\kappa^{\alpha_\kappa} \quad \text{και} \quad \beta = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_\kappa^{\beta_\kappa}$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_\kappa$ φυσικοί αριθμοί. Επομένως θα είναι

$$\alpha^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_\kappa^{2\alpha_\kappa} \quad \text{και} \quad \beta^2 = p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \dots p_\kappa^{2\beta_\kappa} .$$

Έτσι, θα έχουμε

$$(\alpha, \beta) = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_\kappa^{\delta_\kappa}, \quad \text{όπου} \quad \delta_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}, \quad i = 1, 2, ..., \kappa$$

και

$$(\alpha^2, \beta^2) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_\kappa^{d_\kappa}, \quad \text{όπου} \quad d_i = \min\{2\alpha_i, 2\beta_i\}, \quad i = 1, 2, ..., \kappa .$$

Όμως, $d_i = \min\{2\alpha_i, 2\beta_i\} = 2\min\{\alpha_i, \beta_i\} = 2\delta_i$, $i = 1, 2, ..., \kappa$. Επομένως, είναι:

$$(\alpha^2, \beta^2) = p_1^{2\delta_1} p_2^{2\delta_2} \dots p_\kappa^{2\delta_\kappa} = \left(p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_\kappa^{\delta_\kappa}\right)^2 = (\alpha, \beta)^2 .$$

16. Επειδή $(\alpha, \beta) = 1$, οι κανονικές μορφές των α και β δεν έχουν κοινούς παράγοντες. Επομένως, θα ισχύει

$$\alpha = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\kappa^{\alpha_\kappa} \quad \text{και} \quad \beta = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_\lambda^{\beta_\lambda} \tag{1}$$

όπου $p_1, p_2, ..., p_\kappa, q_1, q_2, ..., q_\lambda$ θετικοί πρώτοι, διαφορετικοί ανά δύο, και $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_\lambda$ θετικοί ακέραιοι.

Έτσι, θα έχουμε

$$\alpha\beta = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\kappa^{\alpha_\kappa} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_\lambda^{\beta_\lambda} \tag{2}$$

Επειδή το γινόμενο $\alpha\beta$ είναι τετράγωνο θετικού ακέραιου, οι εκθέτες $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_\lambda$ θα είναι όλοι άρτιοι, δηλαδή της μορφής

$$a_i = 2\mu_i \quad \text{και} \quad \beta_j = 2\nu_j, \quad \text{όπου} \quad \mu_1, \mu_2, ..., \mu_\kappa, \nu_1, \nu_2, ..., \nu_\lambda \in \mathbf{N}^* .$$

Επομένως, λόγω της (1), έχουμε

$$\alpha = p_1^{2\mu_1} p_2^{2\mu_2} \dots p_\kappa^{2\mu_\kappa} = \left(p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \dots p_\kappa^{\mu_\kappa}\right)^2 = \mu^2, \quad \mu \in \mathbf{N}^*$$

και

$$\beta = q_1^{2\nu_1} q_2^{2\nu_2} \dots q_\lambda^{2\nu_\lambda} = \left(q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \dots q_\lambda^{\nu_\lambda}\right)^2 = \nu^2, \quad \nu \in \mathbf{N}^* .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
5.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ C ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $z=(2\lambda+3)+(6-\lambda)i$, οπότε:

α) πραγματικός αν και μόνο αν $6-\lambda=0$, δηλαδή $\lambda=6$

β) φανταστικός αν και μόνο αν $2\lambda+3=0$, δηλαδή $\lambda=-\dfrac{3}{2}$.

2. α) Είναι:

$$(x+y)+(x-y)i=3-i \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(1,2)$$

β) Είναι:

$$\sqrt{3x^2+x-6}+(x^2-3)i=2+i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2+x-6}=2 \\ x^2-3=1 \end{cases} \qquad (1)$$

Όμως:

$$x^2-3=1 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=2 \quad ή \quad x=-2 .$$

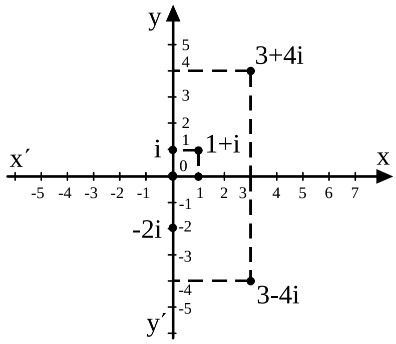
Άρα $x=-2$, αφού από τις λύσεις αυτές μόνο η $x=-2$ επαληθεύει και την (1).

γ) Είναι:

$$9-27i=(3x+2y)-yi \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=9 \\ 27=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9-54}{3} \\ y=27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-45}{3} \\ y=27 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(-15,27)$$

3.



4. α) Είναι $z = 0 + yi$. Άρα, οι εικόνες του z είναι τα σημεία $M(0, y)$, δηλαδή τα σημεία του άξονα $y'y$.

β) Είναι $z = x + 0i$. Άρα, οι εικόνες του z είναι τα σημεία $M(x, 0)$, δηλαδή τα σημεία του άξονα $x'x$.

γ) Είναι $z = x + xi$. Άρα, οι εικόνες του z είναι τα σημεία $M(x, x)$, δηλαδή τα σημεία της ευθείας $y = x$, που είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

5. α) $(-4 + 6i) + (7 - 2i) = (-4 + 7) + (6 - 2)i = 3 + 4i$

β) $(3 - 2i) - (6 + 4i) = (3 - 6) + (-2 - 4)i = -3 - 6i$

γ) $(3 + 4i) + (-8 - 7i) + (5 + 3i) = (3 - 8 + 5) + (4 - 7 + 3)i = 0 + 0i = 0$

δ) $(3 + 2i)(4 + 5i) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5i + 4 \cdot 2i + 2 \cdot 5i^2 = 12 - 10 + 15i + 8i = 2 + 23i$

ε) $3i(6 + i) = 3 \cdot 6i + 3i^2 = -3 + 18i$

στ) $(4 + 3i)(4 - 3i) = 4^2 - (3i)^2 = 16 - 9 \cdot i^2 = 16 - 9(-1) = 16 + 9 = 25$

ζ) $i(3 + i)(2 - i) = i(6 - 3i + 2i - i^2) = i(6 + 1 - i) = 7i - i^2 = 1 + 7i$.

6. α) $\dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+i}{1-i^2} = \dfrac{1+i}{1+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

β) $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1(-1) = -1 = -1 + 0i$

γ) $i^2 + 2i + 1 = -1 + 2i + 1 = 0 + 2i$

δ) $(1+i\sqrt{3})^2=1+2i\sqrt{3}+i^2\cdot 3=1-3+2\sqrt{3}i=-2+2\sqrt{3}i$

ε) $\dfrac{3+i}{2-i}=\dfrac{(3+i)\cdot(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{6+i^2+5i}{2^2-i^2}=\dfrac{5+5i}{4+1}=\dfrac{5(1+i)}{5}=1+i$

στ) $\dfrac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}=\dfrac{(6-i\sqrt{2})\cdot(1-i\sqrt{2})}{(1+i\sqrt{2})\cdot(1-i\sqrt{2})}=\dfrac{6+2i^2-7\sqrt{2}i}{1-2i^2}=\dfrac{6-2-7\sqrt{2}i}{1+2}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{7}{3}\sqrt{2}i$.

7. α) Είναι:

$$(3-2i)^2-(x+iy)=x-yi \Leftrightarrow 9-12i+4i^2-x-yi=x-yi$$

$$\Leftrightarrow 9-4-x-12i=x \Leftrightarrow (5-2x)-12i=0$$

Αυτή όμως είναι αδύνατη, αφού το $-12\neq 0$.

β) Είναι: $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2=\dfrac{1-1+2i}{1-1-2i}=-1$. Άρα η σχέση γράφεται:

$$-1+\frac{1}{x+iy}=1+i \Leftrightarrow \frac{1}{x+iy}=2+i$$

$$\Leftrightarrow x+yi=\frac{1}{2+i}$$

$$\Leftrightarrow x+yi=\frac{2-i}{5}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{5} \quad \text{και} \quad y=\frac{-1}{5}.$$

γ) Είναι:

$$(3-2i)(2x-iy)-2(2x-iy)+2i-1 \Leftrightarrow (3-2i)(2x-iy)-2(2x-iy)=-1+2i$$

$$\Leftrightarrow (1-2i)(2x-iy)=-(1-2i)$$

$$\Leftrightarrow 2x-iy=-1$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y=0.$$

8. α) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}=i^2+i^0+i^2+i^0+i^2+i^0=0$.

β) $\dfrac{1}{i^{11}}-\dfrac{1}{i^{41}}+\dfrac{1}{i^{75}}-\dfrac{1}{i^{1023}}=\dfrac{1}{i^3}-\dfrac{1}{i^1}+\dfrac{1}{i^3}-\dfrac{1}{i^3}=\dfrac{1}{-i}-\dfrac{1}{i}=\dfrac{2}{-i}=2i$.

9. α) Για $z=-5+7i$ είναι $\bar{z}=-5-7i$

β) Για $z=-4-9i$ είναι $\bar{z}=-4+9i$

γ) Για $z=4i$ είναι $\bar{z}=-4i$

δ) Για $z=11$ είναι $\bar{z}=11$

ε) Για $z=-i$ είναι $\bar{z}=i$

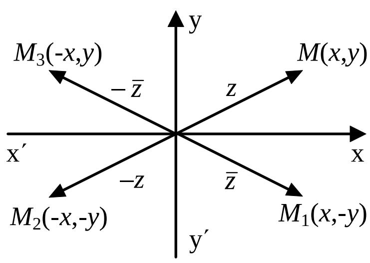
στ) Για $z=0$ είναι $\bar{z}=0$.

10. Αν $M(x,y)$ είναι η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο του μιγαδικού $z=x+yi$, τότε η εικόνα του $\bar{z}=x-yi$ είναι το σημείο $M_1(x,-y)$, του $-z=-x-yi$ είναι το σημείο $M_2(-x,-y)$ και, τέλος, του $-\bar{z}=-x+yi$ είναι το σημείο $M_3(-x,y)$. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι:

Ο $\bar{z}$ προκύπτει από τον z με συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$.

Ο $-z$ προκύπτει από τον z με συμμετρία ως προς κέντρο το $O(0,0)$ και τέλος:

Ο $-\bar{z}$ προκύπτει από τον z με συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$.



11. Έχουμε: $z_1+z_2=\frac{5-9i}{7+4i}+\frac{5+9i}{7-4i}=\frac{5-9i}{7+4i}+\overline{\left(\frac{5-9i}{7+4i}\right)}$ που είναι πραγματικός αριθμός ως άθροισμα δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Ομοίως ο z_1-z_2 θα είναι φανταστικός ως διαφορά δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών.

12. Αν $z=x+yi$ τότε:

α) $z-\bar{z}=6i \Leftrightarrow x+yi-x+yi=6i \Leftrightarrow 2yi=6i \Leftrightarrow yi=3i \Leftrightarrow y=3$.

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών είναι τα σημεία της οριζόντιας ευθείας με εξίσωση $y=3$.

β) $z^2=\bar{z}^2 \Leftrightarrow (x+yi)^2=(x-yi)^2 \Leftrightarrow (x+yi)^2-(x-yi)^2=0$

$\Leftrightarrow (x+yi+x-yi)(x+yi-x+yi)=0$

$\Leftrightarrow 2x\cdot 2yi=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $y=0$.

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών είναι τα σημεία των δύο αξόνων $y'y$ και $x'x$.

γ) $\bar{z}^2 = -z^2 \Leftrightarrow (x-yi)^2 = -(x+yi)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + (yi)^2 - 2xyi = -(x^2 + y^2 i^2 + 2xyi)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2xyi = -x^2 + y^2 - 2xyi$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \pm x .$$

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών είναι τα σημεία των διχοτόμων των τεσσάρων τεταρτημορίων.

δ) $z = 2 - \bar{z} \Leftrightarrow x + yi = 2 - (x - yi)$

$$\Leftrightarrow x + yi = (2 - x) + yi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x \\ y = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1, \ \ y \in \mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + yi .$$

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών είναι τα σημεία της κατακόρυφης ευθείας $x = 1$.

13. α) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 1$.

β) $x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm i\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2(1 \pm \sqrt{2})}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}$

γ) $x + \dfrac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

14. Αφού οι συντελεστές της εξίσωσης $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί και μία ρίζα της είναι η $3 + 2i$, η άλλη θα είναι η $3 - 2i$, οπότε θα ισχύει:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{2} \\ x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -\dfrac{\beta}{2} \\ 13 = \dfrac{\gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -12 \\ \gamma = 26 \end{cases}.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε: $z=\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}$. Άρα:

$$z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow \beta\gamma-\alpha\delta=0\Leftrightarrow \alpha\delta-\beta\gamma=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=0 .$$

2. Έχουμε $z^2=\frac{1+3-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{2-i\sqrt{3}}{2}$, οπότε:

$$z^2-z=\frac{2-i\sqrt{3}}{2}-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{2-i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2} .$$

Άρα: $\frac{1}{z^2-z}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

3. Είναι $(1+i)^2=1-1+2i=2i$, οπότε

$$(1+i)^{20}=\left((1+i)^2\right)^{10}=(2i)^{10}=2^{10}i^{10}=2^{10}i^2=-2^{10} .$$

και $(1-i)^{20}=(\overline{1+i})^{20}=\overline{(1+i)^{20}}=-2^{10}$.

Άρα: $(1+i)^{20}-(1-i)^{20}=0$.

4. Έχουμε $A=i^\nu+i^{-\nu}=i^\nu+\frac{1}{i^\nu}$. Επομένως:

- Αν $\nu=4\kappa$, τότε $i^\nu=1$, οπότε $A=1+1=2$
- Αν $\nu=4\kappa+1$, τότε $i^\nu=i$, οπότε $A=i+\frac{1}{i}=i-i=0$
- Αν $\nu=4\kappa+2$, τότε $i^\nu=-1$, οπότε $A=-1-1=-2$
- Αν $\nu=4\kappa+3$, τότε $i^\nu=-i$, οπότε $A=-i+\frac{1}{-i}=-i+i=0$.

5. α) Αν $z=x+yi$ τότε έχουμε:

$$\bar{z}=z^2\Leftrightarrow x-yi=(x+yi)^2 \quad \Leftrightarrow x-yi=x^2+(yi)^2+2xyi$$

$$\Leftrightarrow x-yi=x^2-y^2+2xyi \quad \Leftrightarrow (x^2-y^2-x)+(2x+1)yi=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+1)y=0\\ x^2-y^2-x=0\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1=0 \text{ ή } y=0 & (1)\\ x^2-y^2-x=0 & (2)\end{cases}$$

- Αν $2x+1=0$, δηλαδή αν $x=-\frac{1}{2}$, τότε η (2) γράφεται:

$$\frac{1}{4}-y^2+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow y^2=\frac{3}{4}\Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα: $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ή $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

- Αν $y=0$, τότε η (2) γράφεται:

$x^2-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

Άρα: $z=0$ ή $z=1$.

β) Αν $z=x+yi$, έχουμε:

$$\bar{z}=z^3\Leftrightarrow x-yi=(x+yi)^3\Leftrightarrow x-yi=x^3+3x^2yi+3x(yi)^2+(yi)^3$$

$$\Leftrightarrow x-yi=x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i$$

$$\Leftrightarrow x-yi=(x^3-3xy^2)+(3x^2-y^2)yi$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3xy^2=x\\ (3x^2-y^2)y=-y\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x(x^2-3y^2-1)=0\\ y(3x^2-y^2+1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0 \quad\text{ή}\quad x^2-3y^2-1=0 & (1)\\ y(3x^2-y^2+1)=0 & (2)\end{cases}$$

- Αν $x=0$, τότε η (2) γράφεται:

$$y(1-y^2)=0\Leftrightarrow y=0 \text{ ή } y=\pm1.$$

Άρα: $z=0$ ή $z=i$ ή $z=-i$.

- Αν $x^2=3y^2+1$, τότε η (2) γράφεται:

$$y[3(3y^2+1)-y^2+1]\Leftrightarrow y(8y^2+4)=0\Leftrightarrow y=0.$$

Άρα $x^2=1$, οπότε $x=1$ ή $x=-1$ και επομένως $z=1$ ή $z=-1$.

6. Αν $z=x+yi$, τότε:

$$\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}=\frac{x+yi}{x-yi}+\frac{x-yi}{x+yi}=\frac{(x+yi)^2+(x-yi)^2}{x^2-(yi)^2}$$

$$=\frac{x^2+(yi)^2+2xyi+x^2+(yi)^2-2xyi}{x^2+y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

Έτσι, αρκεί να αποδείξουμε ότι $-2\leq\frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\leq 2$. Πράγματι:

$$-2\leq\frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\leq 2\Leftrightarrow -1\leq\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow -(x^2+y^2)\leq x^2-y^2\leq x^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2-y^2\leq x^2-y^2\\ x^2-y^2\leq x^2+y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq 2x^2\\ 0\leq 2y^2\end{cases}$$

που ισχύουν και οι δύο. Άρα ισχύει και η αρχική διπλή ανισότητα.

7. **α΄ τρόπος:**

Είναι $(\alpha+\beta i)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i=z$ και $(\beta-\alpha i)^2=\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta i=-z$. Άρα

$$(\alpha+\beta i)^{10}+(\beta-\alpha i)^{10}=\left((\alpha+\beta i)^2\right)^5+\left((\beta-\alpha i)^2\right)^5=z^5+(-z)^5=z^5-z^5=0.$$

β΄ τρόπος:

Είναι $\beta-\alpha i=-i(\alpha+\beta i)$. Επομένως:

$$(\alpha+\beta i)^{10}+(\beta-\alpha i)^{10}=(\alpha+\beta i)^{10}+i^{10}(\alpha+\beta i)^{10}=(\alpha+\beta i)^{10}-(\alpha+\beta i)^{10}=0.$$

8. α) Έχουμε:
- $z=\overline{z}\Leftrightarrow x+yi=x-yi\Leftrightarrow 2yi=0\Leftrightarrow y=0\Leftrightarrow z\in\mathbf{R}$
- $z=-\overline{z}\Leftrightarrow x+yi=-x+yi\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0\Leftrightarrow z$ φανταστικός

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{u}=u$ και $\overline{v}=-v$. Επειδή $\overline{z}_1=\frac{1}{z_1}$ και $\overline{z}_2=\frac{1}{z_2}$

θα είναι:

- $\bar{u}=\dfrac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2}=\dfrac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}}{1+\dfrac{1}{z_1}\dfrac{1}{z_2}}=\dfrac{\dfrac{z_2+z_1}{z_1z_2}}{\dfrac{z_1z_2+1}{z_1z_2}}=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=u$.

- $\bar{v}=\dfrac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2}=\dfrac{\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_2}}{1+\dfrac{1}{z_1}\dfrac{1}{z_2}}=\dfrac{\dfrac{z_2-z_1}{z_1z_2}}{\dfrac{z_1z_2+1}{z_1z_2}}=\dfrac{-(z_1-z_2)}{1+z_1z_2}=-v$.

9. α) Έστω $z=x+yi$. Τότε $\dfrac{1}{z}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y}{x^2+y^2}i$. Επομένως:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right)=5\mathrm{Re}(z)&\Leftrightarrow x+\frac{x}{x^2+y^2}=5x\\ &\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{x^2+y^2}-4\right)=0\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{x^2+y^2}=4\\ &\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ή} \quad x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 .\end{aligned}$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι ο άξονας $y'y$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$ και ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{2}$.

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)=-3\mathrm{Im}(z)&\Leftrightarrow y-\frac{y}{x^2+y^2}=-3y\\ &\Leftrightarrow 4y-\frac{y}{x^2+y^2}=0\\ &\Leftrightarrow y\left(4-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0\\ &\Leftrightarrow y=0 \ \text{ή} \ \frac{1}{x^2+y^2}=4\\ &\Leftrightarrow y=0 \ \text{ή} \ x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 .\end{aligned}$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι ο άξονας $x'x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$ και ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}$.

5.3 ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε:

- $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}=|1-i|$, αφού $|z|=|\bar{z}|$
- $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5=|3-4i|$
- $|-5i|=\sqrt{0^2+(-5)^2}=\sqrt{25}=5$
- $|-4|=4$, $\left|\frac{1+i}{1-i}\right|=\frac{|1+i|}{|1-i|}=1$, αφού $|1+i|=|1-i|$
- $|(1-i)^2\cdot(1+i)^4|=|1-i|^2\cdot|1+i|^4=\sqrt{2}^2\cdot\sqrt{2}^4=2\cdot2^2=2^3=8$
- $|(2-i)\cdot(1+2i)|=|2-i|\cdot|1+2i|=\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5}^2=5$
- $\left|\frac{3+i}{4-3i}\right|=\frac{|3+i|}{|4-3i|}=\frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

2. Έχουμε

- $|(1+i)^2|=|1+i|^2=\sqrt{2}^2=2$
- $\left|\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right|=\left|\frac{1+i}{1-i}\right|^2=\left(\frac{|1+i|}{|1-i|}\right)^2=1^2=1$
- $\left|\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right|=\left|\frac{1-i}{1+i}\right|^2=\left(\frac{|1-i|}{|1+i|}\right)^2=1^2=1$
- $\left|\left(\frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2\right|=\left|\frac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right|^2=\left(\frac{|\lambda+\mu i|}{|\lambda-\mu i|}\right)^2=1^2=1$

3. α) Έχουμε

$$|z^2|=z^2 \Leftrightarrow |z|^2=z^2 \Leftrightarrow z\bar{z}=z^2 \Leftrightarrow z(\bar{z}-z)=0$$

$$\Leftrightarrow z=0 \text{ ή } \bar{z}=z \qquad \Leftrightarrow z\in\mathbf{R}$$

β) **α΄ τρόπος:** Αν $|z-1|=z$, τότε ο z θα είναι μη αρνητικός πραγματικός, αφού τέτοιος είναι και ο $|z-1|$. Επομένως θα είναι $z=x$, $x\geq 0$, οπότε θα έχουμε:

$$|z-1|=z \Leftrightarrow |x-1|=x$$

$$\Leftrightarrow x-1=x \quad \text{ή} \quad x-1=-x$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Άρα, $\quad z=\frac{1}{2}$.

β΄ τρόπος: Αν $\quad z=x+yi$, τότε:

$$|z-1|=z \Leftrightarrow |(x-1)+yi|=x+yi \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+yi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+y^2}=x \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|=x \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}.$$

Άρα, $\quad z=\frac{1}{2}$.

γ) **α΄ τρόπος:** Αν $|z+i|=2\bar{z}$, τότε ο $2\bar{z}$ θα είναι μη αρνητικός πραγματικός. Επομένως θα είναι $z=x$, $x\geq 0$, οπότε θα έχουμε:

$$|z+i|=2\bar{z} \Leftrightarrow |x+i|=2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=2x \Leftrightarrow x^2+1=4x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2=1 \quad \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \qquad \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{αφού} \quad x\geq 0$$

Άρα, $\quad z=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

β΄ τρόπος: Όπως ο β΄ τρόπος της περίπτωσης 3β).

4. α) Αν $|z|=1$, τότε ο z θα απέχει από το $O(0,0)$ απόσταση ίση με 1. Άρα, ο z θα βρίσκεται σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας $\rho=1$, ο οποίος έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$.

β) Αν $|z-i|=1$, ο z θα απέχει από τον μιγαδικό i (δηλαδή από το σημείο $K(0,1)$) απόσταση σταθερή ίση με 1. Άρα, ο z θα βρίσκεται σε κύκλο κέντρου $K(0,1)$ και ακτίνας $\rho=1$, ο οποίος έχει εξίσωση: $x^2+(y-1)^2=1$.

γ) Ομοίως, αν $|z+1+2i|=3$, δηλαδή αν $|z-(-1-2i)|=3$, τότε ο z θα απέχει από τον μιγαδικό $-1-2i$ απόσταση ίση με 3. Άρα, ο z θα βρίσκεται σε κύκλο κέντρου $K(-1,-2)$ και ακτίνας $\rho=3$, ο οποίος έχει εξίσωση $(x+1)^2+(y+2)^2=9$.

δ) Αν $1<|z|<2$, τότε ο z θα βρίσκεται μεταξύ των κύκλων με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνες $\rho_1=1$ και $\rho_2=2$.

ε) Αν $|z|\geq 2$, τότε ο z θα βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$ ή πάνω στον κύκλο αυτό.

5. α) Έχουμε

$$|z+1|=|z-2i| \Leftrightarrow |z-(-1)|=|z-2i|.$$

Άρα, οι αποστάσεις του μιγαδικού z από τους μιγαδικούς $-1+0i$ και $0+2i$, δηλαδή από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(0,2)$ είναι ίσες. Επομένως ο z θα ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος AB.

β) Έχουμε

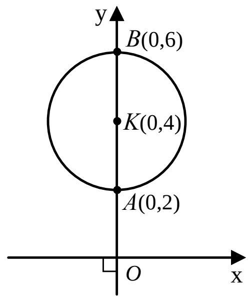
$$|z-i|>|z+1| \Leftrightarrow |z-i|>|z-(-1)|.$$

Επομένως, η απόσταση του μιγαδικού z από τον i, είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του από τον μιγαδικό $-1+0i$. Άρα ο z θα βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετο του AB και από το σημείο B, όπου A και B τα σημεία με συντεταγμένες $(0,\ 1)$ και $(-1,\ 0)$ αντιστοίχως.

6. Έχουμε $z=\dfrac{1+xi}{x+i}$, άρα $|z|=\left|\dfrac{1+xi}{x+i}\right|=\dfrac{|1+xi|}{|x+i|}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2+1}}=1$. Αφού $|z|=1$, ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας M του z θα είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

7. Από την ισότητα $|z-4i|=2$ προκύπτει ότι η απόσταση του $M(z)$ από το σημείο $K(0,4)$ είναι σταθερή και ίση με 2. Επομένως το M ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(0,4)$ και ακτίνα $\rho=2$.

Σύμφωνα με την εφαρμογή 2 (σελ. 199), ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $z_1 = 2i$ και ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $z_2 = 6i$.



8. Είναι:

$$|w-1| = |2z| \Leftrightarrow |w-1| = 2|z| \Leftrightarrow |w-1| = 2 .$$

Άρα, οι εικόνες του w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

9. α΄ τρόπος:

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $z_2 = x_2 + y_2 i$. Τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \quad \text{και} \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y - y_2)i .$$

Άρα:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= 2(x_1^2 + y_1^2) + 2(x_2^2 + y_2^2) = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 .$$

β΄ τρόπος:

Έχουμε:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$$

$$= 2z_1\bar{z}_1 + 2z_2\bar{z}_2$$

$$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 .$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $z = x + yi$, τότε:

$$\sqrt{2}|z| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2(x^2 + y^2)} \quad \text{και} \quad |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)| = |x| + |y| .$$

Άρα:

$$\sqrt{2}|z|\geq|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|\Leftrightarrow\sqrt{2(x^2+y^2)}\geq|x|+|y|$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)\geq x^2+y^2+2|x||y|\Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2|x||y|$$

$$\Leftrightarrow|x|^2+|y|^2-2|x||y|\geq 0\Leftrightarrow(|x|-|y|)^2\geq 0\text{, που ισχύει}$$

2. Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} w\text{ φανταστικός } &\Leftrightarrow \overline{w}=-w \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=-\frac{z-1}{z+1} \\ &\Leftrightarrow (\overline{z}-1)(z+1)=-(z-1)(\overline{z}+1) \\ &\Leftrightarrow z\overline{z}+\overline{z}-z-1=-z\overline{z}-z+\overline{z}+1 \\ &\Leftrightarrow 2z\overline{z}=2 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z}=1 \\ &\Leftrightarrow |z|^2=1 \\ &\Leftrightarrow |z|=1\,. \end{aligned}$$

3. Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} w\in\mathbf{R} &\Leftrightarrow \overline{w}=w \\ &\Leftrightarrow \overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}=z+\frac{1}{z} \\ &\Leftrightarrow \overline{z}^2 z+z=\overline{z}z^2+\overline{z} \\ &\Leftrightarrow z\overline{z}(\overline{z}-z)-(\overline{z}-z)=0 \\ &\Leftrightarrow (z\overline{z}-1)(\overline{z}-z)=0 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z}=1 \quad \text{ή} \quad \overline{z}=z \\ &\Leftrightarrow |z|=1 \quad \text{ή} \quad z\in\mathbf{R}\,. \end{aligned}$$

4. Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} w\text{ φανταστικός } &\Leftrightarrow \overline{w}=-w \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{z}-\alpha i}{-i\overline{z}+\alpha}=\frac{-(z+\alpha i)}{iz+\alpha} \\ &\Leftrightarrow iz\overline{z}+\alpha\overline{z}+\alpha z-\alpha^2 i=iz\overline{z}-\alpha\overline{z}-\alpha z-\alpha^2 i \\ &\Leftrightarrow 2\alpha\overline{z}=-2\alpha z \\ &\Leftrightarrow \overline{z}=-z \\ &\Leftrightarrow z\quad\text{φανταστικός} \end{aligned}$$

5. Αν $z=x+yi$, επειδή η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 1, θα είναι $|z|=1$ ή, ισοδύναμα, $x^2+y^2=1$. Επομένως, θα έχουμε:

$$|w|=\left|\frac{2z-i}{iz+2}\right|=\frac{|2z-i|}{|iz+2|}=\frac{|2x+(2y-1)i|}{|(-y+2)+xi|}$$

$$=\frac{\sqrt{4x^2+(2y-1)^2}}{\sqrt{(2-y)^2+x^2}}=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2-4y+1}}{\sqrt{4+y^2-4y+x^2}}.$$

$$=\frac{\sqrt{4(x^2+y^2)-4y+1}}{\sqrt{(x^2+y^2)-4y+4}}=\frac{\sqrt{4\cdot 1-4y+1}}{\sqrt{1-4y+4}}=1.$$

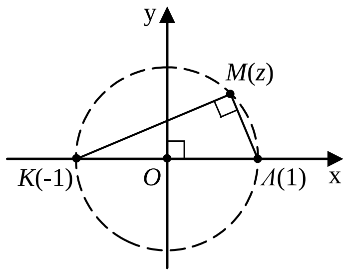
6. Έχουμε:

$$|2z-1|=|z-2|\Leftrightarrow|2z-1|^2=|z-2|^2$$
$$\Leftrightarrow(2z-1)(2\bar{z}-1)=(z-2)(\bar{z}-2)$$
$$\Leftrightarrow 4z\bar{z}-2z-2\bar{z}+1=z\bar{z}-2z-2\bar{z}+4$$
$$\Leftrightarrow 3z\bar{z}=3$$
$$\Leftrightarrow z\bar{z}=1$$
$$\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1.$$

Άρα, η εικόνα του z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

7. Έχουμε:

$$A=(1+z)(1+\bar{z})+(1-z)(1-\bar{z})$$
$$=1+z+\bar{z}+z\bar{z}+1-z-\bar{z}+z\bar{z}$$
$$=2(1+z\bar{z})$$
$$=2(1+|z|^2)$$
$$=2\cdot 2=4.$$



Αν *M*, *K* και *Λ* είναι οι εικόνες των μιγαδικών z, -1 και 1, αντιστοίχως, τότε θα είναι:

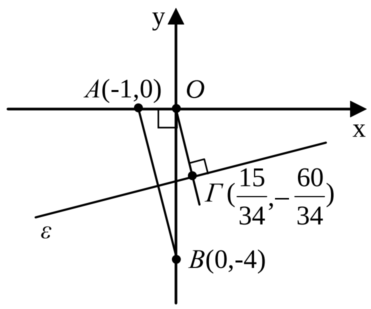
$$|1+z|^2=MK^2, \quad |1-z|^2=M\Lambda^2 \quad \text{και} \quad 4=K\Lambda^2.$$

Επομένως, η ισότητα $|1+z|^2+|1-z|^2=4$, που αποδείξαμε, γράφεται

$$MK^2+M\Lambda^2=K\Lambda^2,$$

που σημαίνει ότι το τρίγωνο *ΜΚΛ* είναι ορθογώνιο στο *Μ*. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού το *Μ* είναι σημείο του μοναδιαίου κύκλου και η *ΚΛ* διάμετρος αυτού.

8. • Αν $z=x+yi$, τότε θα έχουμε:



$$|z+1|=|z+4i|\Leftrightarrow|(x+1)+yi|=|x+(y+4)i|$$
$$\Leftrightarrow(x+1)^2+y^2=x^2+(y+4)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x+1=8y+16$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{15}{8}.$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $\varepsilon: y=\frac{1}{4}x-\frac{15}{8}$

• Το ζητούμενο σημείο είναι το ίχνος της καθέτου από την αρχή O στην ε. Η κάθετος αυτή έχει εξίσωση $y=-4x$ και επομένως οι συντεταγμένες του σημείου τομής της με την ε βρίσκεται από τη λύση του συστήματος $\begin{cases} y=-4x \\ y=\frac{1}{4}x-\frac{15}{8} \end{cases}$, που είναι το ζεύγος $\left(\frac{15}{34},-\frac{60}{34}\right)$.

9. Έστω $z_1=x_1+y_1i$ και $z_2=x_2+y_2i$. Επειδή το σημείο M_1 κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=4^2$ θα ισχύει

$$x_1^2+y_1^2=16. \tag{1}$$

Επομένως, η ισότητα $z_2=z_1+\frac{4}{z_1}$ γράφεται διαδοχικά:

$$x_2+y_2i=x_1+y_1i+\frac{4}{x_1+y_1i}$$
$$x_2+y_2i=x_1+y_1i+\frac{4(x_1-y_1i)}{x_1^2+y_1^2}$$
$$x_2+y_2i=x_1+y_1i+\frac{4(x_1-y_1i)}{16} \qquad \text{(λόγω της (1))}$$
$$x_2+y_2i=x_1+y_1i+\frac{x_1}{4}-\frac{y_1}{4}i$$
$$x_2+y_2i=\frac{5x_1}{4}+\frac{3y_1i}{4}.$$

Επομένως, $x_2=\frac{5x_1}{4}$ και $y_2=\frac{3y_1}{4}$, οπότε

$$x_1=\frac{4x_2}{5} \quad \text{και} \quad y_1=\frac{4y_2}{3} \tag{2}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των x_1 και y_1 στην (1) και έχουμε:

$$\left(\frac{4x_2}{5}\right)^2+\left(\frac{4y_2}{3}\right)^2=16 \Leftrightarrow \frac{16x_2^2}{25}+\frac{16y_2^2}{9}=16 \Leftrightarrow \frac{x_2^2}{25}+\frac{y_2^2}{9}=1.$$

Άρα, το σημείο M_2 κινείται στην έλλειψη με μεγάλο άξονα $2\alpha=10$ και εστίες $E'(-4,0)$, $E(4,0)$.

10. α) Έχουμε $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

β) Από τις ισότητες $|z_1|=|z_2|=|z_3|=...=|z_\kappa|=1$ έχουμε

$$\bar{z}_1=\frac{1}{z_1},\ \bar{z}_2=\frac{1}{z_2},\ \bar{z}_3=\frac{1}{z_3},...,\bar{z}_\kappa=\frac{1}{z_\kappa}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+...+\frac{1}{z_\kappa}\right| &= |\bar{z}_1+\bar{z}_2+...+\bar{z}_\kappa| \\ &= \left|\overline{z_1+z_2+...+z_\kappa}\right| \\ &= |z_1+z_2+...+z_\kappa| \qquad \text{(αφού } |z|=|\bar{z}|\text{)}.\end{aligned}$$

5.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε

α) $\rho=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$ και $\begin{cases}\text{συν}\theta=\frac{1}{2}\\ \text{ημ}\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Άρα ένα όρισμα είναι το $\theta=\frac{\pi}{3}$. Επομένως:

$$1+\sqrt{3}i=2\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)$$

β) $\rho=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$ και $\begin{cases}\text{συν}\theta=\dfrac{1}{2}\\ \text{ημ}\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Άρα ένα όρισμα είναι το $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$. Επομένως:

$$1-\sqrt{3}i=2\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

γ) $\rho=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$ και $\begin{cases}\text{συν}\theta=-\dfrac{1}{2}\\ \text{ημ}\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Άρα ένα όρισμα είναι το $\theta=\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$. Επομένως:

$$-1-\sqrt{3}i=2\left(\text{συν}\frac{4\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{4\pi}{3}\right).$$

δ) $\rho=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ και $\begin{cases}\text{συν}\theta=\dfrac{-1}{2}\\ \text{ημ}\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Άρα ένα όρισμα είναι το $\theta=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$. Επομένως:

$$-1+\sqrt{3}i=2\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right).$$

ε) Είναι: $4=4\cdot 1=(\text{συν}0+i\text{ημ}0)$.

στ) Είναι: $-4=4(\text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi)$.

2. α) $4(\text{συν}15^0+i\text{ημ}15^0)\cdot 6(\text{συν}30^0+i\text{ημ}30^0)=24(\text{συν}45^0+i\text{ημ}45^0)$

$$=24\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=12\sqrt{2}+12\sqrt{2}i$$

β) $5\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}+i\eta\mu\frac{\pi}{8}\right)\cdot 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}+i\eta\mu\frac{3\pi}{8}\right)=10\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)=10(0+1i)=10i$

γ) $\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{10}+i\eta\mu\frac{2\pi}{10}\right)\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{10}+i\eta\mu\frac{3\pi}{10}\right)=1\cdot 1\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{10}+i\eta\mu\frac{5\pi}{10}\right)$

$$=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2}=0+i\cdot 1=i\ .$$

3. Έχουμε:

α) $\dfrac{25(\sigma\upsilon\nu 160^0+i\eta\mu 160^0)}{5(\sigma\upsilon\nu 100^0+i\eta\mu 100^0)}=5(\sigma\upsilon\nu 60^0+i\eta\mu 60^0)=5\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i$

β) $\dfrac{6\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}+i\eta\mu\frac{5\pi}{6}\right)}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}}=6\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$=6\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)=6\cdot 0+6\cdot i\cdot 1=6i$$

γ) $\dfrac{7(\sigma\upsilon\nu 130^0+i\eta\mu 130^0)}{14(\sigma\upsilon\nu(-20^0)+i\eta\mu(-20^0))}=\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu(150^0)+i\eta\mu(150^0))$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i\ .$$

4. Από το θεώρημα de Moivre έχουμε:

α) $(2(\sigma\upsilon\nu 20^0+i\eta\mu 20^0))^3=2^3(\sigma\upsilon\nu(3\cdot 20^0)+i\eta\mu(3\cdot 20^0))$

$$=8(\sigma\upsilon\nu 60^0+i\eta\mu 60^0)=8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4+4\sqrt{3}i$$

β) $\left(3(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4}+i\eta\mu\frac{5\pi}{4}\right)^8=3^8\left(\sigma\upsilon\nu\left(8\cdot\frac{5\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(8\cdot\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

$$=3^8\left(\sigma\upsilon\nu(5\cdot 2\pi)+i\eta\mu(5\cdot 2\pi)\right)=3^8(1+i\cdot 0)=3^8$$

γ) $\left(\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{16}=\sigma\upsilon\nu(-4\pi)+i\eta\mu(-4\pi)=1$.

5. Έχουμε $\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}$. Άρα:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-6}=\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)^{-6}=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=-i(-1)=i\,.$$

6. Αν $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, τότε $z=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}$. Άρα:

$$\begin{aligned} z^{2000}&=\sigma\upsilon\nu\left(2000\,\frac{\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(2000\,\frac{\pi}{3}\right)\\ &=\sigma\upsilon\nu\left(333\cdot 2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(333\cdot 2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\\ &=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

7. Έχουμε $z_1=\sqrt{3}+i=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)$, οπότε $z_1^{\nu}=2^{\nu}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\nu\pi}{6}\right)$.

Άρα: $z_1^{\nu}+z_2^{\nu}=z_1^{\nu}+\bar{z}_1^{\nu}=z_1^{\nu}+\overline{z_1^{\nu}}=2\cdot 2^{\nu}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{6}=2^{\nu+1}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{6}$.

8. Έστω $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$. Επειδή $i=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2}$, η διαίρεση του μιγαδικού z με το i ισοδυναμεί με στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z κατά γωνία $-\frac{\pi}{2}$.

9. Έχουμε:

$$\frac{z}{w}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,. \qquad (1)$$

Όμως, $z=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$ και $w=\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)$. Επομένως:

$$\frac{z}{w}=\frac{2\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{12}+i\text{ημ}\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\text{συν}\frac{\pi}{12}+i\sqrt{2}\text{ημ}\frac{\pi}{12} \qquad (2)$$

Άρα, λόγω των (1) και (2), έχουμε:

$$\begin{cases}\sqrt{2}\ \text{συν}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\\ \sqrt{2}\ \text{ημ}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases},\ \text{οπότε}\ \begin{cases}\text{συν}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\\ \text{ημ}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\end{cases}.$$

10. Αν $z=x+yi$, τότε:

$$z^2=\bar{z}\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=x-yi$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=x\\ 2xy=-y\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2-x=0\\ y(2x+1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2-x=0\\ y=0\ \text{ή}\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x=0\\ y=0\end{cases}\ \text{ή}\ \begin{cases}y^2=\frac{3}{4}\\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\overset{z\neq 0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}\ \text{ή}\ \begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\ \text{ή}\ \begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Άρα, έχουμε τους μιγαδικούς $z_1=1$, $z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Για τον z_1 έχουμε:

$$|z_1|=1 \quad \text{και} \quad Argz_1=0$$

Για τον z_2 έχουμε:

$$|z_2|=1 \quad \text{και} \quad Argz_2=\frac{2\pi}{3}$$

Τέλος, για τον z_3 έχουμε:

$$|z_3|=1 \quad \text{και} \quad Argz_3=\frac{4\pi}{3},$$

αφού $z_2=\bar{z}_3$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. α) Ο μιγαδικός $w=\left(\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta}\right)^{\nu}=\dfrac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)^{\nu}}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta)^{\nu}}$ ως πηλίκο δύο συζυγών μιγαδικών θα έχει μέτρο 1. Για την εύρεση ενός ορίσματος του w θεωρούμε το μιγαδικό $w_1=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
w_1&=\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)^2}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta)(1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)}\\
&=\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2-\eta\mu^2\theta+2i\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2+\eta\mu^2\theta}\\
&=\frac{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu^2\theta+2i\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu^2\theta}\\
&=\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta+2i\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{2+2\sigma\upsilon\nu\theta}\\
&=\frac{2\sigma\upsilon\nu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)+2i\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}\\
&=\frac{2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)}{2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}=\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta\,.
\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε

$$w=w_1^{\nu}=(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)^{\nu}=\sigma\upsilon\nu\nu\theta+i\eta\mu\nu\theta\,.$$

Άρα, το μέτρο του w είναι 1 και ένα όρισμά του είναι το $\nu\theta$.

β) Έχουμε:

$$\left(\frac{2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{100}=\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{100}=\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}}{1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-i\eta\mu\frac{\pi}{4}}\right)^{100}\overset{(\alpha)}{=}$$

$$=\sigma\upsilon\nu\frac{100\pi}{4}+i\eta\mu\frac{100\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu25\pi+i\eta\mu25\pi=-1\,.$$

2. α) Είναι

$$1+i=\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{και} \quad 1-i=\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}-i\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right).$$

Επομένως

$$(1+i)^{\nu}=(1-i)^{\nu}\Leftrightarrow\sqrt{2}^{\nu}\left(\text{συν}\frac{\nu\pi}{4}+i\text{ημ}\frac{\nu\pi}{4}\right)=\sqrt{2}^{\nu}\left(\text{συν}\frac{-\nu\pi}{4}+i\text{ημ}\frac{-\nu\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\nu\pi}{4}-\frac{-\nu\pi}{4}=2\kappa\pi,\quad \kappa\in\mathbf{Z}$$

$$\Leftrightarrow\nu=4\kappa,\quad \kappa\in\mathbf{Z}.$$

β) Έχουμε:

$$f(\nu)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{\nu}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{\nu}\overset{(\alpha)}{=}\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)^{\nu}+\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\nu}=2\text{συν}\frac{\nu\pi}{4},$$

οπότε

$$f(\nu+4)=2\text{συν}\frac{(\nu+4)\pi}{4}=2\text{συν}\left(\pi+\frac{\nu\pi}{4}\right)=-2\text{συν}\frac{\nu\pi}{4}=-f(\nu).$$

Άρα $\quad f(\nu+4)+f(\nu)=0$.

3. Αν $\overrightarrow{OM_1}$ και $\overrightarrow{OM_2}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των εικόνων των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως, τότε έχουμε:

$$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow|\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}|=|\overrightarrow{OM_1}|+|\overrightarrow{OM_2}|$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OM_2} \text{ (άσκηση 15 σελ. 48)}$$

$$\Leftrightarrow Argz_1=Argz_2.$$

4. Έστω $z=x+yi$. Τότε:

α) $z-i=x+(y-1)i$, οπότε

$$Arg(z-i)=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \dfrac{y-1}{x}=\text{εφ}\dfrac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \dfrac{y-1}{x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1\end{cases}.$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ημιευθεία $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$, $x>0$.

β) $z+1=x+1+yi$, οπότε

$$Arg(z+1)=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ \frac{y}{x+1}=\text{εφ}\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ y>0 \end{cases}.$$

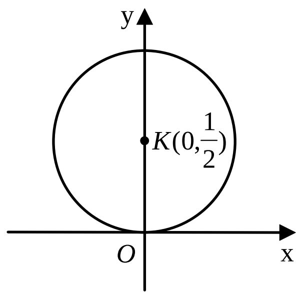
Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ημιευθεία $y=x+1$, $x>-1$.

γ) $\frac{z}{z-i}=\frac{x+yi}{x+(y-1)i}=\frac{x^2+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}+\frac{x}{x^2+(y-1)^2}i$, οπότε

$$Arg\left(\frac{z}{z-i}\right)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-y=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ x>0 \end{cases}.$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι τα σημεία του ημικυκλίου

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad x>0.$$

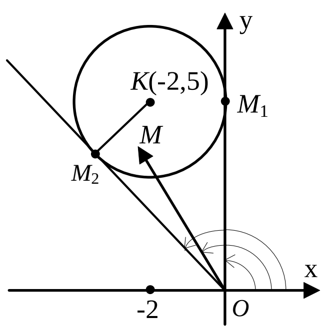


5. Είναι:

$$|z+2-5i|\le 2 \Leftrightarrow |z-(-2+5i)|\le 2. \qquad (1)$$

Άρα, η (1) παριστάνει τον κυκλικό δίσκο που ορίζει ο κύκλος C με κέντρο $K(-2,5)$ και ακτίνα $\rho=2$.

Έστω OM_1 και OM_2 οι εφαπτόμενες του κύκλου C από την αρχή των αξόνων. Τότε από όλα τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}$, όπου M σημείο του κυκλικού δίσκου, τη μικρότερη γωνία με τον άξονα $x'x$ σχηματίζει το $\overrightarrow{OM_1}$, και τη



μεγαλύτερη το $\overrightarrow{OM_2}$. Επομένως, από όλους τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την (1) το μικρότερο βασικό όρισμα το έχει ο μιγαδικός z_1 που απεικονίζεται στο M_1 και το μεγαλύτερο ο μιγαδικός z_2 που απεικονίζεται στο M_2. Επειδή ο $y'y$ εφάπτεται του κύκλου C στο M_1 θα είναι $z_1=5i$.
Για τον προσδιορισμό του z_2 εργαζόμαστε ως εξής:
Η OM_2 έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda x,\ \lambda\in\mathbf{R}$ και, επειδή εφάπτεται του C, θα πρέπει το σύστημα

$$(\Sigma)\begin{cases} y=\lambda x \\ (x+2)^2+(y-5)^2=4 \end{cases}$$

να έχει διπλή λύση. Είναι όμως:

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases} y=\lambda x \\ (x+2)^2+(\lambda x-5)^2=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\lambda x & (1) \\ (\lambda^2+1)x^2-2(5\lambda-2)x+25=0 & (2) \end{cases}$$

Επομένως, πρέπει η διακρίνουσα της (2) να είναι ίση με μηδέν, δηλαδή πρέπει

$$4(5\lambda-2)^2-4\cdot 25(\lambda^2+1)=0\Leftrightarrow -10\lambda-21=0\Leftrightarrow \lambda=-\frac{21}{20}$$

Στην περίπτωση αυτή το σύστημα έχει διπλή λύση την $(x,y)=\left(-\frac{100}{29},\frac{105}{29}\right)$.

Άρα, $z_2=-\frac{100}{29}+\frac{105}{29}i$.

6. Είναι $z^{\nu}=\text{συν}\nu\theta+i\text{ημ}\nu\theta$ και $z^{-\nu}=\text{συν}(-\nu\theta)+i\text{ημ}(-\nu\theta)$. Άρα:

$$z^{\nu}+z^{-\nu}=2\text{συν}\nu\theta$$
$$z^{\nu}-z^{-\nu}=2i\text{ημ}\nu\theta.$$

7. α) Είναι

$$|w|=|(\sqrt{3}-i)\cdot z|=|\sqrt{3}-i|\cdot|z|=\left(\sqrt{3^2+(\_1)^2}\right)\cdot 1=\sqrt{4}=2.$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$.

β) Επειδή $|w|=2$ και $Argw=\frac{\pi}{4}$, έχουμε

$$w=2\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

8. Πρέπει

$$\frac{\frac{2\kappa}{1+\kappa^2}}{\frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2}}=\text{εφ}\frac{\pi}{3} \qquad (1) \qquad \text{και} \qquad \text{Im}(z)=\frac{2\kappa}{1+\kappa^2}>0. \qquad (2)$$

Όμως, η (1) γράφεται:

$$\frac{2\kappa}{1-\kappa^2}=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\kappa=\sqrt{3}-\sqrt{3}\kappa^2\Leftrightarrow\sqrt{3}\kappa^2+2\kappa-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\kappa=-\sqrt{3} \text{ ή } \kappa=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

οπότε, λόγω της (2), έχουμε $\kappa=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα:

$$z=\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}+i\frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+i\frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9. Για να είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ πρέπει και αρκεί να ισχύει $\Delta\leq 0$. Όμως:

$$\begin{aligned}\Delta\leq 0&\Leftrightarrow(2|z_1-z_2|)^2-4\cdot 1(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)\leq 0\\
&\Leftrightarrow|z_1-z_2|^2\leq(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)\\
&\Leftrightarrow(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})\leq(1+z_1\bar{z}_1)(1+z_2\bar{z}_2)\\
&\Leftrightarrow(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\leq 1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_1+z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2\\
&\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2\leq 1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_1+z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2\\
&\Leftrightarrow 1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2\bar{z}_1z_2\geq 0\Leftrightarrow(1+z_1\bar{z}_2)+\bar{z}_1z_2(1+z_1\bar{z}_2)\geq 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (1+z_1\bar{z}_2)(1+\bar{z}_1 z_2)\geq 0 \Leftrightarrow (1+z_1\bar{z}_2)\overline{(1+z_1\bar{z}_2)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow |1+z_1\bar{z}_2|^2\geq 0\,, \qquad \text{που ισχύει.}$$

5.5 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ C

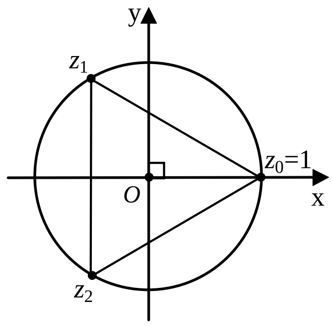
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. α) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί

$$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{3}, \qquad \kappa = 0,1,2\,,$$

δηλαδή οι $\quad z_0 = 1\,,\quad z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$

$z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$

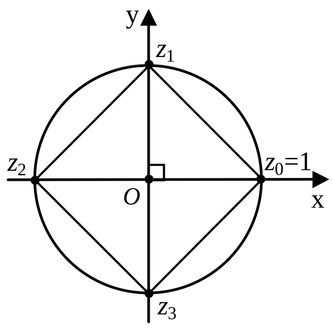


β) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί

$$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{4} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{4}, \qquad \kappa = 0,1,2,3\,,$$

δηλαδή οι $\quad z_0 = 1\,,\quad z_1 = i\,,\quad z_2 = -1\,,$

$z_3 = -i\,.$

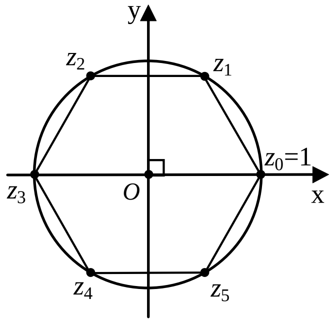


γ) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί

$$z_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{6} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{6}, \qquad \kappa = 0,1,2,3,4,5\,,$$

δηλαδή οι $\quad z_0 = 1\,,\quad z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$

$z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ z_3 = -1\,,\ z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$



$$z_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

2. α) Έχουμε $z^3=-i \Leftrightarrow z^3=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}+i\eta\mu\frac{3\pi}{2}$. Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί

$$z_\kappa=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}}{3}\right)+i\eta\mu\left(\frac{2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}}{3}\right),\quad \kappa=0,1,2$$

δηλαδή οι $z_0=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2}=i$

$$z_1=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}-i\eta\mu\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

και $z_2=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}-i\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

β) Έχουμε:

$$z^4=16\left(\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}+i\eta\mu\frac{4\pi}{3}\right)\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{16}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi+\frac{4\pi}{3}}{4}+i\eta\mu\frac{2\kappa\pi+\frac{4\pi}{3}}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow z=2\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\kappa\pi+2\pi}{6}\right)+i\eta\mu\left(\frac{3\kappa\pi+2\pi}{6}\right)\right),\quad \kappa=0,1,2,3$$

γ) $$z^5=243\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}+i\eta\mu\frac{5\pi}{6}\right)\Leftrightarrow z=\sqrt[5]{243}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}}{5}+i\eta\mu\frac{2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow z=3\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\kappa\pi+5\pi}{30}\right)+i\eta\mu\left(\frac{2\kappa\pi+5\pi}{30}\right)\right),\quad \kappa=0,1,2,3,4\ .$$

3. α) Έχουμε, $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}$.

Επομένως, οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί

$$z_\kappa = \sqrt[3]{1}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}}{3} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}}{3}\right) = \text{συν}\left(\frac{8\kappa\pi + \pi}{12}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{8\kappa\pi + \pi}{12}\right), \quad \kappa = 0,1,2\,,$$

δηλαδή οι $\quad z_0 = \text{συν}\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$z_1 = \text{συν}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

και $\quad z_2 = \text{συν}\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{17\pi}{12}\right) = -\text{συν}\frac{5\pi}{12} - i\text{ημ}\frac{5\pi}{12}\,.$

β) Έχουμε $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{συν}\frac{5\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{5\pi}{3}$. Επομένως, οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί

$$z_\kappa = \text{συν}\left(\frac{2\kappa\pi + \frac{5\pi}{3}}{4}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2\kappa\pi + \frac{5\pi}{3}}{4}\right), \quad \kappa = 0,1,2,3\,.$$

γ) Έχουμε $z^6 = 64(\text{συν}\pi + i\text{ημ}\pi)$. Επομένως, οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί

$$z_\kappa = \sqrt[6]{64}\left(\text{συν}\left(\frac{2\kappa\pi + \pi}{6}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2\kappa\pi + \pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2\left(\text{συν}\frac{(2\kappa + 1)\pi}{6} + i\text{ημ}\frac{(2\kappa + 1)\pi}{6}\right), \quad \kappa = 0,1,2,3,4,5\,.$$

4. α) Έχουμε $z^3 + 3z^2 + 4z = 8 \Leftrightarrow z^3 + 3z^2 + 4z - 8 = 0$. Με σχήμα Horner βρίσκουμε ότι μια ρίζα είναι η $z = 1$ και η εξίσωση γράφεται:

$$(z - 1)(z^2 + 4z + 8) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \quad \text{ή} \quad z = \frac{-4 \pm i4}{2} = -2 \pm 2i\,.$$

β) Για την $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$, που είναι διτετράγωνη, θέτουμε $z^2 = w$ και έχουμε:

$$w^2 + 5w + 4 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow w = -4 \quad \text{ή} \quad w = -1\,.$$

- Αν $w=-4$, τότε $z^2=-4$, οπότε $z=2i$ ή $z=-2i$
- Αν $w=-1$, τότε $z^2=-1$, οπότε $z=i$ ή $z=-i$.

5. Η εξίσωση $3x^3-10x^2+7x+10=0$ έχει πραγματικούς συντελεστές και, αφού έχει ώς ρίζα τον $2+i$, θα έχει και τον συζυγή του $2-i$. Έτσι το α΄ μέλος θα έχει ως παράγοντα το γινόμενο $(x-2-i)(x-2+i)=x^2-4x+5$. Εκτελούμε τη διαίρεση και βρίσκουμε πηλίκο $3x+2$ και υπόλοιπο 0. Άρα η εξίσωση γράφεται:

$$(3x+2)(x^2-4x+5)=0 \Leftrightarrow 3x+2=0 \text{ ή } x^2-4x+5=0$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad x=2\pm i.$$

6. Επειδή $w^3=1$, είναι $1+w+w^2=\dfrac{w^3-1}{w-1}=0$, οπότε $1+w^2=-w$ και $1+w=-w^2$. Έτσι, έχουμε:

$$(1-w+w^2)(1+w-w^2)=(-2w)(-2w^2)=4w^3=4, \text{ αφού } w^3=1$$

7. Είναι:

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5=0 \Leftrightarrow \frac{x^6-1}{x-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^6-1=0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^6=1 \\ x\neq 1 \end{cases}.$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί:

$$x_\kappa=\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{6}, \qquad \kappa=1,2,3,4,5,$$

αφού, για $\kappa=0$, έχουμε $x_0=1$, που εξαιρείται.

8. Έχουμε: $$z^3+3z^2+3z+9=0 \Leftrightarrow z^2(z+3)+3(z+3)=0$$
$$\Leftrightarrow (z+3)(z^2+3)=0 \Leftrightarrow z+3=0 \text{ ή } z^2+3=0$$
$$\Leftrightarrow z=-3 \text{ ή } z=\pm i\sqrt{3}.$$

Παρατηρούμε ότι οι εικόνες $A(-3,0)$, $B(0,\sqrt{3})$, $\Gamma(0,-\sqrt{3})$ των ριζών -3, $i\sqrt{3}$ και $-i\sqrt{3}$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου, αφού $AB=B\Gamma=\Gamma A=2\sqrt{3}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. α) Έχουμε $z^3=1-i \Leftrightarrow z^3=\sqrt{2}\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt[6]{2}\left(\text{συν}\left(\frac{2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}}{3}\right)+i\text{ημ}\left(\frac{2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}}{3}\right)\right), \quad \kappa=0,1,2\ .$$

β) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$(z-1)^3=(1-i)(z+1)^3 \qquad (1)$$

και επειδή δεν έχει ρίζα τον αριθμό $z=-1$, παίρνει τη μορφή

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3=1-i\ . \qquad (2)$$

Θέτουμε

$$\frac{z-1}{z+1}=w, \qquad (3)$$

οπότε η (2) γράφεται

$$w^3=1-i\ .$$

Έτσι, λόγω της (α), έχουμε

$$w=\sqrt[6]{2}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}}{3}+i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}}{3}\right), \quad \kappa=0,1,2\ . \qquad (4)$$

Όμως, λόγω της (3), είναι

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z+1}=w &\Leftrightarrow z-1=zw+w\\ &\Leftrightarrow z(1-w)=1+w\\ &\Leftrightarrow z=\frac{1+w}{1-w}, \quad \text{αφού} \quad w\overset{(4)}{\neq}1.\end{aligned}$$

Έτσι, η εξίσωση έχει ως λύσεις τους αριθμούς:

$$z_\kappa = \frac{1+w_\kappa}{1-w_\kappa}, \quad \text{όπου} \quad w_\kappa = \sqrt[6]{2}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}}{3} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}}{3}\right), \qquad \kappa=0,1,2\,.$$

2. α΄ τρόπος:

Η εξίσωση $z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0$ γράφεται διαδοχικά

$$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+2z^2+2z+1=0$$
$$z^6+2(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)-1=0$$
$$z^6+2\frac{z^6-1}{z-1}-1=0$$

(αφού ο $z=1$ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης)

$$z^7+z^6-z-1=0,\ z\neq 1$$
$$z^6(z+1)-(z+1)=0,\ z\neq 1$$
$$(z+1)(z^6-1)=0,\ z\neq 1\,.$$

Επομένως, $z=-1$ ή ($z^6=1$, με $z\neq 1$). Για $z\neq 1$, έχουμε:

$$z^6-1=0 \Leftrightarrow (z^3-1)(z^3+1)$$
$$\Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)(z+1)(z^2-z+1)=0$$
$$\Leftrightarrow z^2+z+1=0 \quad \text{ή} \quad z+1=0 \quad \text{ή} \quad z^2-z+1=0$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad z=-1 \quad \text{ή} \quad z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

Επομένως, οι ρίζες είναι οι:

$$-1 \ \text{(διπλή)}, \quad \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\,.$$

β΄ τρόπος:

Μια προφανής ρίζα είναι η $z=-1$. Έτσι η εξίσωση, σύμφωνα με το σχήμα Horner, γράφεται:

$$(z+1)(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z+1=0 \quad \text{ή} \quad z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$$
$$\Leftrightarrow z+1=0 \quad \text{ή} \quad \frac{z^6-1}{z-1}=0$$

$$\Leftrightarrow z=-1 \quad \text{ή} \quad (z^6=1 \ \text{ με } \ z\neq 1)$$

$$\Leftrightarrow z=-1 \quad \text{ή} \quad z=\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{6}, \quad \kappa=1,2,3,4,5$$

$$\Leftrightarrow z=-1\,(\text{διπλή}) \ \text{ ή } \ z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2} \ \text{ ή } \ z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

3. Έχουμε:

$$z^7+1=0 \Leftrightarrow z^7=-1=\text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi \Leftrightarrow z=z_\kappa, \qquad \kappa=0,1,2,3,4,5,6,$$

όπου $$z_\kappa=\left(\text{συν}\frac{\pi+2\kappa\pi}{7}+i\text{ημ}\frac{\pi+2\kappa\pi}{7}\right).$$

Επομένως

$$z_0=\text{συν}\frac{\pi}{7}+i\text{ημ}\frac{\pi}{7}, \qquad z_4=\bar{z}_2,$$

$$z_1=\text{συν}\frac{3\pi}{7}+i\text{ημ}\frac{3\pi}{7}, \qquad z_5=\bar{z}_1,$$

$$z_2=\text{συν}\frac{5\pi}{7}+i\text{ημ}\frac{5\pi}{7} \qquad z_6=\bar{z}_0.$$

$$z_3=\text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi=-1,$$

Το πολυώνυμο z^7+1 γράφεται

$$z^7+1=(z+1)(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1) \tag{1}$$

Όμως

$$\begin{aligned} z^7+1&=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)(z-z_6) \\ &=(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z+1)(z-\bar{z}_2)(z-\bar{z}_1)(z-\bar{z}_0) \\ &=(z+1)\cdot\left[(z-z_0)(z-\bar{z}_0)\right]\cdot\left[(z-z_1)(z-\bar{z}_1)\right]\cdot\left[(z-z_2)(z-\bar{z}_2)\right] \end{aligned} \tag{2}$$

Από τις ισότητες (1) και (2) έχουμε:

$$z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=\left[(z-z_0)(z-\bar{z}_0)\right]\left[(z-z_1)(z-\bar{z}_1)\right]\left[(z-z_2)(z-\bar{z}_2)\right].$$

Καθένας από τους τρεις παράγοντες του δευτέρου μέλους είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. Πράγματι, ο παράγοντας $(z-z_0)(z-\bar{z}_0)$ γράφεται

$$(z-z_0)(z-\bar{z}_0)= z^2-(z_0+\bar{z}_0)z+z_0\bar{z}_0$$

$$=z^2-2z\text{συν}\frac{\pi}{7}+1.$$

Ομοίως $\quad (z-z_1)(z-\bar{z}_1)=z^2-(z_1+\bar{z}_1)z+z_1\bar{z}_1$

$$=z^2-2z\text{συν}\frac{3\pi}{7}+1$$

και $\quad (z-z_2)(z-\bar{z}_2)=z^2-(z_2+\bar{z}_2)z+z_2\bar{z}_2$

$$=z^2-2z\text{συν}\frac{5\pi}{7}+1.$$

4. Έχουμε

$$(z^2+1)^2+z^3+z=0 \Leftrightarrow (z^2+1)^2+z(z^2+1)=0 \Leftrightarrow (z^2+1)(z^2+z+1)=0$$

$$\Leftrightarrow z^2+1=0 \;\text{ ή }\; z^2+z+1=0$$

$$\Leftrightarrow z^2+1=0 \;\text{ ή }\; (\,z^3=1,\;\text{ με }\; z\neq 1)$$

$$\Leftrightarrow z=\pm i \;\text{ ή }\; z=\omega \;\text{ ή }\; z=\overline{\omega}\,,$$

όπου $\omega=\text{συν}\frac{2\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}$, αφού $z\neq 1$.

Θέτουμε, τώρα, καθεμιά από τις ρίζες αυτές στην εξίσωση $z^{16}+2z^{14}=1=0$ και ελέγχουμε αν την επαληθεύουν ή όχι. Έτσι:

- Για $z=i$ είναι:

$$z^{16}+2z^{14}+1=i^{16}+2i^{14}+1=1-2+1=0\,.$$

Άρα, ο μιγαδικός i είναι ρίζα και της εξίσωσης $z^{16}+2z^{14}+1=0$. Επειδή η εξίσωση αύτή έχει πραγματικούς συντελεστές, ο συζυγής του i, δηλαδή ο $-i$ θα είναι και αυτός ρίζα της. Άρα, οι αριθμοί i και $-i$ είναι κοινές ρίζες των εξισώσεων.

- Για $z=\omega$, επειδή $\omega^3=1$, είναι:

$$\omega^{16}+2\omega^{14}+1=\omega^{15}\cdot\omega+2\omega^{12}\cdot\omega^2+1$$

$$=\omega+2\omega^2+1=(1+\omega+\omega^2)+\omega^2=0+\omega^2=\omega^2\neq 0$$

Άρα, η ω δεν είναι κοινή ρίζα των εξισώσεων, οπότε και η συζυγής της δεν μπορεί να είναι κοινή ρίζα αυτών.
Τελικά, οι δύο εξισώσεις έχουν δύο ρίζες κοινές, τους μιγαδικούς i και $-i$.

5. α΄ τρόπος: Η εξίσωση: $z^7\cdot\bar{z}^3=1$ γράφεται ισοδύναμα

$$z^4(z\cdot\bar{z})^3=1\Leftrightarrow z^4(|z|^2)^3=1\Leftrightarrow z^4|z|^6=1. \qquad (1)$$

Επομένως:

$$\left|z^4|z|^6\right|=|1|\Leftrightarrow|z|^4|z|^6=1\Leftrightarrow|z|^{10}=1\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow z\bar{z}=1\Leftrightarrow(z\bar{z})^3=1.$$

Άρα η (1) γράφεται:

$$z^4(z\bar{z})^3=1\Leftrightarrow z^4=1\Leftrightarrow z=\pm1 \text{ ή } z=\pm i.$$

β΄ τρόπος: Έστω $z=\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$ η τριγωνομετρική μορφή του z. Τότε η εξίσωση γράφεται

$$\rho^7(\text{συν}7\theta+i\text{ημ}7\theta)\cdot\rho^3(\text{συν(-}3\theta)+i\text{ημ(-}3\theta))=1\Leftrightarrow\rho^{10}(\text{συν}4\theta+i\text{ημ}4\theta)=1$$

$$\Leftrightarrow\rho=1 \text{ και } 4\theta=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z}$$

$$\Leftrightarrow\rho=1 \text{ και } \theta=\frac{\kappa\pi}{2},\ \kappa\in\mathbf{Z}.$$

Άρα, οι ρίζες είναι

$$z_0=1,\qquad z_1=\text{συν}\frac{\pi}{2}+i\text{ημ}\frac{\pi}{2}=i,$$

$$z_2=\text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi=-1 \quad\text{και}\quad z_3=\text{συν}\frac{3\pi}{2}+i\text{ημ}\frac{3\pi}{2}=-i.$$

6. Έστω ξ μία πραγματική ρίζα της εξίσωσης. Τότε $(1+\xi i)^\nu=p(1-\xi i)^\nu$, οπότε

$$p=\frac{(1+\xi i)^\nu}{(1-\xi i)^\nu}. \text{ Άρα } |p|=\left|\frac{(1+\xi i)^\nu}{(1-\xi i)^\nu}\right|=\left|\left(\frac{1+\xi i}{1-\xi i}\right)^\nu\right|=\left|\frac{1+\xi i}{1-\xi i}\right|^\nu=\left(\frac{|1+\xi i|}{|1-\xi i|}\right)^\nu=1^\nu=1.$$

7. α) Είναι:

$$x_1+x_2=\frac{-(-2)}{1}=2 \quad\text{και}\quad x_1x_2=\frac{4}{1}=4.$$

Άρα,

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2^2-2\cdot4=-4 \quad\text{και}\quad x_1^2x_2^2=(x_1x_2)^2=16$$

β) Αφού η εξίσωση $x^2+px+q=0$ έχει ρίζες τις $\rho_1=x_1^2$ και $\rho_2=x_2^2$ θα ισχύει:

$$p=-(\rho_1+\rho_2)=-(x_1^2+x_2^2)=4 \quad \text{και} \quad q=\rho_1\rho_2=x_1^2x_2^2=16\,.$$

8. α) Η εξίσωση $\text{συν}^2\theta\cdot z^2-2\text{συν}\theta\cdot z+(5-4\text{συν}^2\theta)=0$ είναι β΄ βαθμού ως προς z και έχει διακρίνουσα:

$$\begin{aligned}\varDelta&=(-2\text{συν}\theta)^2-4\text{συν}^2\theta(5-4\text{συν}^2\theta)\\&=4\text{συν}^2\theta(1-5+4\text{συν}^2\theta)=4\text{συν}^2\theta(-4+4\text{συν}^2\theta)\\&=-16\text{συν}^2\theta(1-4\text{συν}^2\theta)=-(4\text{συν}\theta\,\text{ημ}\theta)^2<0\,.\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε:

$$z_{1,2}=\frac{2\text{συν}\theta\pm i4\text{ημ}\theta\text{συν}\theta}{2\text{συν}^2\theta}=\frac{1\pm 2i\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}=\frac{1}{\text{συν}\theta}\pm 2i\text{εφ}\theta\,.$$

β) Οι εικόνες των λύσεων, καθώς το θ μεταβάλλεται στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, είναι τα σημεία με συνισταμένες $(x,y)=\left(\frac{1}{\text{συν}\theta},\pm 2\text{εφ}\theta\right)$. Έτσι, θα έχουμε:

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\text{συν}\theta}\\ y=\pm 2\dfrac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta}\end{cases},\quad \text{οπότε}\quad \begin{cases}x^2=\dfrac{1}{\text{συν}^2\theta}\\ y^2=4\dfrac{\text{ημ}^2\theta}{\text{συν}^2\theta}\end{cases}\quad \text{και άρα}\quad \begin{cases}x^2=\dfrac{1}{\text{συν}^2\theta}\\ \dfrac{y^2}{4}=\dfrac{\text{ημ}^2\theta}{\text{συν}^2\theta}\end{cases}.$$

Επομένως $\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}=\frac{1-\text{ημ}^2\theta}{\text{συν}^2\theta}=\frac{\text{συν}^2\theta}{\text{συν}^2\theta}=1$. Άρα, οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης κινούνται στην υπερβολή

$$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}=1\,.$$

9. Έχουμε

$$\begin{aligned}x^9-x^5+x^4-1=0&\Leftrightarrow x^5(x^4-1)+x^4-1=0\\&\Leftrightarrow (x^4-1)(x^5+1)=0\Leftrightarrow x^4-1=0 \quad (1) \quad \text{ή} \quad x^5+1=0 \quad (2)\end{aligned}$$

Όμως: $x^4-1=0\Leftrightarrow(x^2-1)(x^2+1)=0\Leftrightarrow x^2=1$ ή $x^2=-1\Leftrightarrow x=\pm 1$ ή $x=\pm i$

και $\quad x^5+1=0 \Leftrightarrow x^5=-1 \Leftrightarrow x^5=\text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi$

$$\Leftrightarrow x=\text{συν}\frac{2\kappa\pi+\pi}{5}+i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi+\pi}{5}, \quad \kappa=0,1,2,3,4\,.$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. α) Έχουμε

$$f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{\bar{z}}-1\right)\left(\left(-\frac{1}{z}\right)+1\right)}{\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)+\left(-\frac{1}{z}\right)}=\frac{\frac{-(1+\bar{z})}{\bar{z}}\cdot\frac{(z-1)}{z}}{-\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{-\frac{(z-1)\cdot(\bar{z}+1)}{z\bar{z}}}{\frac{-(z+\bar{z})}{z\bar{z}}}=\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}=f(z)\,.$$

β) Έχουμε:

$$f(z)=\frac{z\bar{z}+z-\bar{z}-1}{z+\bar{z}}=\frac{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+2\beta yi-1}{2\alpha x}=\frac{\alpha^2x^2+\beta^2y^2-1}{2\alpha x}+\frac{\beta y}{\alpha x}i\,.$$

Έτσι:

$$\text{Re}(f(z))=0 \Leftrightarrow \alpha^2x^2+\beta^2y^2-1=0 \Leftrightarrow \alpha^2x^2+\beta^2y^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2}=1,$$

Άρα, τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται στην έλλειψη $\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2}=1$.

2. Αν $z=x+yi$, τότε η ισότητα $w=\overline{w}_1$ γράφεται διαδοχικά

$$z-zi=\frac{1}{\alpha}-\alpha i$$

$$x+yi-(x+yi)i=\frac{1}{\alpha}-\alpha i$$

$$(x+y)-(x-y)i=\frac{1}{\alpha}-\alpha i$$

Επομένως $\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{\alpha} \\ x-y=\alpha \end{cases}$ και με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $x^2-y^2=1$ που είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

3. α) Αν $z=x+yi$, τότε θα έχουμε

$$\begin{cases} x=\lambda+2 \\ y=3\lambda-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=x-2 \\ y=3\lambda-1 \end{cases} \Leftrightarrow y=3(x-2)-1 \Leftrightarrow y=3x-7\,.$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y=3x-7$.

β) Έχουμε:

$$w=z+1+i \Leftrightarrow w=(\lambda+3)+3\lambda i\,.$$

Άρα, αν $w=x+yi$, τότε θα ισχύει:

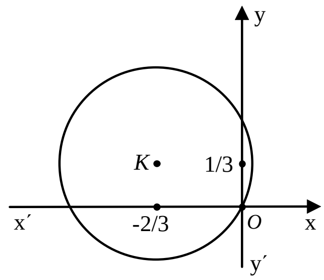
$$\begin{cases} x=\lambda+3 \\ y=3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=x-3 \\ y=3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow y=3(x-3) \Leftrightarrow y=3x-9\,.$$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι η ευθεία $y=3x-9$.

(γ) Το πλησιέστερο σημείο της ευθείας ε : $y=3x-7$ από το σημείο $O(0,0)$ είναι το ίχνος της κάθετης η προς την ε από το $O(0,0)$. Επειδή $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta=-1$, έχουμε $\lambda_\eta=-\frac{1}{3}$. Άρα, η ευθεία η έχει εξίσωση $y=-\frac{1}{3}x$. Έτσι, το ζητούμενο σημείο θα είναι το σημείο τομής των ε και η. Επιλύοντας το σύστημα $\begin{cases} y=3x-7 \\ y=-\dfrac{1}{3}x \end{cases}$ βρίσκουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι

$(x,y)=\left(\frac{21}{10},-\frac{7}{10}\right)$. Άρα, το πλησιέστερο σημείο της ε προς το O θα είναι το $A\left(\frac{21}{10},-\frac{7}{10}\right)$.

4. α) Αν $z=x+yi$, τότε



$$|2z+1|<|z+i| \Leftrightarrow |(2x+1)+2yi|<|x+(y+1)i|$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2+(2y)^2<x^2+(y+1)^2$$

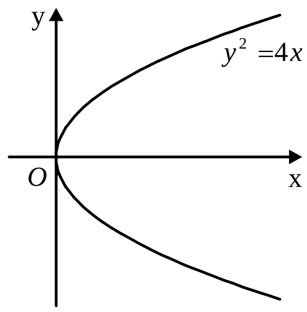
$$\Leftrightarrow 4x^2+4x+1+4y^2-x^2-y^2-2y-1<0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+4x+3y^2-2y<0$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2+2\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]+\left[y^2-2\frac{1}{3}y+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]<\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2<\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2.$$

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών z που ικανοποιούν την ανίσωση είναι τα εσωτερικά σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο $K\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{5}}{3}$.



β) Αν $z=x+yi$, τότε έχουμε

$$|z-1|=1+\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow |(x-1)+yi|=1+x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=1+x \quad \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+y^2=(1+x)^2\\ 1+x\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y^2=4x\\ 1+x\geq 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow y^2=4x.$$

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών που ικανοποιούν την εξίσωση είναι τα σημεία της παραβολής $y^2=4x$.

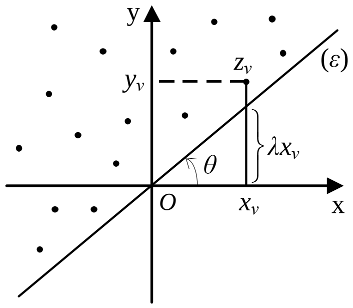
5. Αν $z_\nu=x_\nu+iy_\nu$, $\nu=1,2,...,\kappa$, τότε

$$z_1+z_2+...+z_\kappa=(x_1+x_2+...+x_\kappa)+i(y_1+y_2+...+y_\kappa)$$

Επομένως, αν υποθέσουμε ότι $z_1+z_2+...+z_\kappa=0$, τότε θα έχουμε

$$x_1+x_2+...+x_\kappa=0 \quad \text{και} \quad y_1+y_2+...+y_\kappa=0 \qquad (1)$$

Εφόσον, όμως, οι εικόνες των μιγαδικών $z_1, z_2,...,z_\kappa$ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας $y=\lambda x$, $\lambda\in\mathbf{R}$ και δεν ανήκουν σ'αυτήν, θα ισχύει



($y_\nu>\lambda x_\nu$ για κάθε ν)

ή ($y_\nu<\lambda x_\nu$ για κάθε ν),

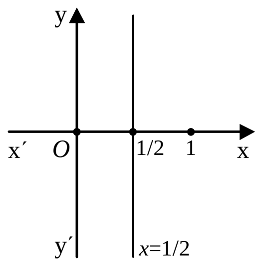
οπότε θα έχουμε

$y_1+y_2+...+y_\kappa>\lambda(x_1+x_2+...+x_\kappa)$ ή

$y_1+y_2+...+y_\kappa<\lambda(x_1+x_2+...+x_\kappa)$.

Έτσι, λόγω της (1), θα ισχύει $0>\lambda\cdot 0$ ή $0<\lambda\cdot 0$, που είναι άτοπο.

6. Από την ισότητα, $(1-z)^\nu=z^\nu$, αν $z=x+yi$, έχουμε:



$$\begin{aligned}|(1-z)^\nu|=|z^\nu| &\Leftrightarrow |1-z|^\nu=|z|^\nu\\ &\Leftrightarrow |1-z|=|z|\\ &\Leftrightarrow |(1-x)-yi|=|x+yi|\\ &\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}\\ &\Leftrightarrow 1-2x=0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Άρα, κάθε λύση της εξίσωσης ανήκει στην ευθεία $x=\frac{1}{2}$.

7. α) Αφού το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ και $\alpha\neq 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, ως γνωστόν, οι τιμές του για κάθε $x\in\mathbf{R}$ θα είναι ομόσημες του α. Έτσι οι $f(\kappa)$, $f(\lambda)$ θα είναι ομόσημοι του α, άρα και μεταξύ τους, οπότε $f(\kappa)\cdot f(\lambda)>0$, δηλαδή $(\alpha\kappa^2+\beta\kappa+\gamma)(\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma)>0$.

β) Επειδή $z_2=\bar{z}_1$, έχουμε:

$$(az_1^2+\beta z_1+\gamma)(az_2^2+\beta z_2+\gamma)=(az_1^2+\beta z_1+\gamma)(\alpha\bar{z}_1^2+\beta\bar{z}_1+\gamma)$$

$$=(\alpha z_1^2+\beta z_1+\gamma)\overline{(\alpha z_1^2+\beta z_1+\gamma)}$$

$$=|\alpha z_1^2+\beta z_1+\gamma|^2>0\,,$$

αφού ο z_1 δεν είναι ρίζα του $\alpha z^2+\beta z+\gamma$.

8. Οι ρίζες της εξίσωσης $z^\nu=1$ είναι οι:

$$z_\kappa=\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu}+i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu},\qquad \kappa=0,1,2,\ldots,\nu-1\,.$$

Επομένως η σχέση $1+z_1+z_2+\ldots+z_{\nu-1}=0$ γράφεται

$$\left(1+\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+\text{συν}\frac{4\pi}{\nu}+\ldots+\text{συν}\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}\right)+i\left(\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}+\text{ημ}\frac{4\pi}{\nu}+\ldots+\text{ημ}\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}\right)=0\,.$$

Άρα

$$\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}+\text{ημ}\frac{4\pi}{\nu}+\ldots+\text{ημ}\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}=0$$

και
$$\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+\text{συν}\frac{4\pi}{\nu}+\ldots+\text{συν}\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}=-1\,.$$