ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών, που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Θετικής Κατεύθυνσης της Β΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου, του οποίου η εφαρμογή αρχίζει από το σχολικό έτος 1998-1999. Κατά τη συγγραφή του καταβλήθηκε προσπάθεια, ώστε το περιεχόμενό του να ανταποκρίνεται στις δυνατότητες των μαθητών, για τους οποίους προορίζεται, και να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στο χρόνο, που προβλέπεται από το ωρολόγιο πρόγραμμα.
Το βιβλίο αποτελείται από πέντε κεφάλαια.

- Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια εισαγωγή στο *Διανυσματικό Λογισμό* και στην *Αναλυτική Γεωμετρία*. Τα διανύσματα έχουν ιδιαίτερη σημασία όχι μόνο για τα Μαθηματικά αλλά και για πολλές άλλες επιστήμες, αφού προσφέρουν τη δυνατότητα μαθηματικοποίησης μεγεθών, τα οποία δεν ορίζονται μόνο με την αριθμητική τιμή τους. Εξάλλου, η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών οδηγεί στην “αλγεβροποίηση” της Γεωμετρίας, δηλαδή στη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων με αλγεβρικές μεθόδους.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο, αφού δοθεί ο ορισμός της εξίσωσης μιας γραμμής, μελετώνται οι ιδιότητες της ευθείας.
- Στο τρίτο κεφάλαιο συνεχίζεται η ύλη της Αναλυτικής Γεωμετρίας με τη σπουδή των *κωνικών τομών*, οι οποίες για πρώτη φορά μελετήθηκαν από τους Αρχαίους Έλληνες. Σήμερα το ενδιαφέρον για τις κωνικές τομές είναι αυξημένο εξαιτίας του μεγάλου αριθμού των θεωρητικών και πρακτικών εφαρμογών τους.
- Το τέταρτο κεφάλαιο αποτελεί μία εισαγωγή στη *Θεωρία Αριθμών*, στην ανάπτυξη της οποίας μεγάλη είναι η συμβολή των Αρχαίων Ελλήνων. Κύριος στόχος της διδασκαλίας της ενότητας αυτής είναι η άσκηση των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία.
- Στο πέμπτο, τέλος, κεφάλαιο εισάγεται ο λογισμός με *μιγαδικούς αριθμούς,* οι οποίοι αποτελούν τη βάση για τη Μαθηματική Ανάλυση και συγχρόνως έχουν πολλές πρακτικές εφαρμογές στις άλλες επιστήμες.

Τα οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις ή κρίσεις για το βιβλίο, από συναδέλφους, από μαθητές και από κάθε πολίτη που ενδιαφέρεται για τα ζητήματα της παιδείας, θα είναι πολύ ευπρόσδεκτα από τη συγγραφική ομάδα. Οι παρατηρήσεις να αποστέλλονται στο *Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μεσογείων 396, 153 10 Αγία Παρασκευή*

Μάρτιος 1998.

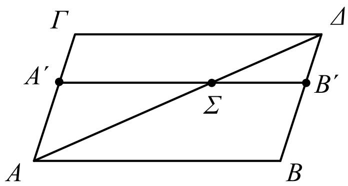
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 *ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ*

Εισαγωγή

Το διάνυσμα είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα έννοιας που αναπτύχθηκε μέσα από τη στενή αλληλεπίδραση Μαθηματικών και Φυσικής. Ο “κανόνας του παραλληλόγραμμου”, σύμφωνα με τον οποίο το μέτρο και η κατεύθυνση δύο δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα εκφράζονται από τη διαγώνιο του παραλληλόγραμμου που σχηματίζουν, ήταν γνωστός με διάφορες μορφές στους Αρχαίους Έλληνες επιστήμονες. Ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς, για παράδειγμα, στο έργο του “Μηχανικά” αποδεικνύει με χρήση αναλογιών την ακόλουθη γεωμετρική πρόταση:

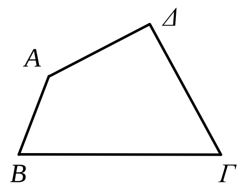
Αν ένα σημείο Σ κινείται με ομαλή κίνηση κατά μήκος μιας ευθείας AB, ενώ συγχρόνως η AB κινείται παράλληλα προς τον εαυτό της με το άκρο A να διαγράφει μια ευθεία $A\Gamma$, τότε η πραγματική τροχιά του Σ (η “συνισταμένη κίνηση”) θα είναι η διαγώνιος $A\Delta$ του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$.



Αυτός ο “κανόνας” χρησιμοποιήθηκε πολλούς αιώνες για το γεωμετρικό προσδιορισμό της συνισταμένης, χωρίς όμως να θεωρείται ένα νέο είδος πρόσθεσης ευθυγράμμων τμημάτων, διαφορετικό από εκείνο που χρησιμοποιείται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Για να γίνει αυτό, χρειάστηκε από τη μια μεριά η αποδοχή και συστηματική χρήση των αρνητικών αριθμών στα Μαθηματικά και από την άλλη η μελέτη φυσικών ποσοτήτων όπως η ταχύτητα, η δύναμη, η ορμή και η επιτάχυνση, που χαρακτηρίζονται τόσο από το μέτρο όσο και από τη διεύθυνσή τους. Αυτές οι εξελίξεις έφεραν στο προσκήνιο τις έννοιες της προσανατολισμένης κίνησης και του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος, τις πρώτες ιδέες των οποίων συναντάμε σε έργα επιστημόνων του 17ου αιώνα όπως οι J. Wallis, I. Newton και G.W. Leibniz.

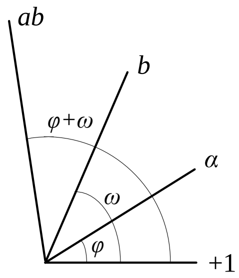
Η ανάπτυξη ενός συστηματικού λογισμού με προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα άρχισε στα τέλη του 18ου αιώνα, για να δοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία στους αρνητικούς αριθμούς, αλλά και για να βρεθεί ένας τρόπος αναλυτικής έκφρασης του μήκους και της διεύθυνσης των ευθύγραμμων τμημάτων. Πρωτοποριακό υπήρξε προς αυτή την κατεύθυνση το έργο των C. Wessel (1799) και R. Argand (1806). Ξεκινώντας από την απλή περίπτωση των προσανατολισμένων τμημάτων που βρίσκονται στην ίδια ευθεία, προχώρησαν στον ορισμό των πράξεων με τυχαία τμήματα του επιπέδου. Συγκεκριμένα, οι ορισμοί του Wessel ήταν οι εξής:

Το άθροισμα διαδοχικών προσανατολισμένων τμημάτων είναι το τμήμα που ενώνει την αρχή του πρώτου με το τέλος του τελευταίου.



ΑΔ=ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ

Το γινόμενο δύο προσανατολισμένων τμημάτων που σχηματίζουν γωνίες φ και ω αντιστοίχως με ένα μοναδιαίο τμήμα, είναι το τμήμα που έχει μήκος το γινόμενο των μηκών των δύο τμημάτων και σχηματίζει γωνία φ+ω με το μοναδιαίο τμήμα.

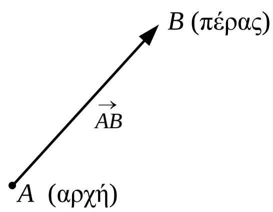


Στις εργασίες των Wessel και Argand (και ορισμένες άλλες που δημοσιεύτηκαν εκείνη την εποχή) υπάρχουν οι βασικές ιδέες που συγκροτούν σήμερα το Διανυσματικό Λογισμό του επιπέδου. Η ουσιαστική ανάπτυξη του κλάδου αρχίζει όμως μερικές δεκαετίες αργότερα, όταν επιχειρείται η γενίκευση αυτών των ιδεών στον τρισδιάστατο χώρο και η θεμελίωση μιας γενικής μαθηματικής θεωρίας. Καθοριστικό υπήρξε προς αυτήν την κατεύθυνση του έργο του W. Hamilton (1843) και του H. Grassmann (1844). O W. Hamilton χρησιμοποίησε τον όρο διάνυσμα (vector). O όρος vector προέρχεται κατά μία εκδοχή από το λατινικό ρήμα “vehere” που σημαίνει μεταφέρω. O H. Grassmann χρησιμοποίησε τους όρους **εσωτερικό** και **εξωτερικό γινόμενο**.
Η παραπέρα εξέλιξη του Διανυσματικού Λογισμού επηρεάστηκε αποφασιστικά από τις εξελίξεις στη Φυσική κατά το δεύτερο μισό του 19ου αιώνα. Η χρήση της θεωρίας του Hamilton από τον ιδρυτή της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας J.C. Maxwell (1873) οδήγησε σε ορισμένες τροποποιήσεις, με βάση τις οποίες οι φυσικοί J.W. Gibbs και O. Heaviside δημιούργησαν στις αρχές της δεκαετίας του 1880 τη σύγχρονη θεωρία του Διανυσματικού Λογισμού (στοιχεία της οποίας παρουσιάζονται σ’ αυτό το κεφάλαιο). Τέλος το 1888, ο G. Peano, με βάση τη θεωρία του Grassmann θεμελίωσε αξιωματικά την έννοια του διανυσματικού χώρου.

1.1 *Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ*

Ορισμός του Διανύσματος

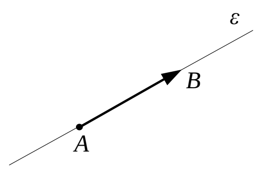
Υπάρχουν μεγέθη, όπως είναι η μάζα, ο όγκος, η πυκνότητα, η θερμοκρασία κτλ., τα οποία προσδιορίζονται από το μέτρο τους και από την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης. Τα μεγέθη αυτά λέγονται **μονόμετρα** ή **βαθμωτά**.
Υπάρχουν όμως και μεγέθη, όπως είναι η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η μετατόπιση, η μαγνητική επαγωγή κτλ., που για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε τη διεύθυνση και τη φορά τους. Τέτοια μεγέθη λέγονται **διανυσματικά** μεγέθη ή απλώς **διανύσματα**.



- Στη Γεωμετρία το **διάνυσμα** ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται πέρας του διανύσματος. Το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται με $\vec{AB}$ και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινάει από το A και καταλήγει στο B.

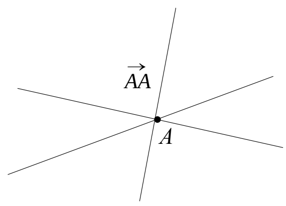
Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα**. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα.
Για το συμβολισμό των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε πολλές φορές τα μικρά γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου επιγραμμισμένα με βέλος· για παράδειγμα, $\vec{\alpha}, \vec{\beta},...,\vec{u},\vec{v},...$

- Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος $\vec{AB}$, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, λέγεται **μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος $\vec{AB}$ και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$. Αν το διάνυσμα $\vec{AB}$ έχει μέτρο 1, τότε λέγεται **μοναδιαίο** διάνυσμα.



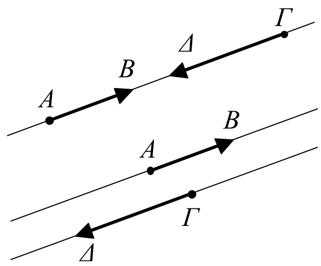
- Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{AB}$ λέγεται **φορέας** του $\vec{AB}$.

Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA}$ μπορούμε να θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το A.



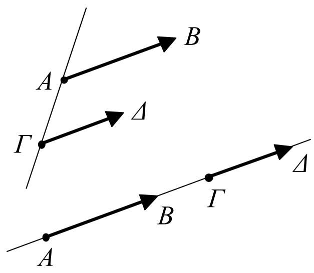
Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ζ, τότε λέμε ότι το $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο προς τη ζ και γράφουμε $\overrightarrow{AB} /\!/ \zeta$.

- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** διανύσματα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε $\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

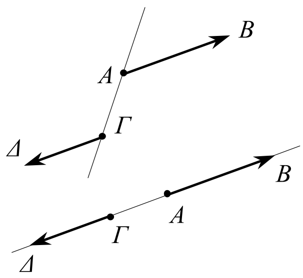


Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε ομόρροπα και αντίρροπα. Συγκεκριμένα:

— Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα**:
α) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία $A\Gamma$ που ενώνει τις αρχές τους ή
β) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες AB και $\Gamma\Delta$ περιέχει την άλλη. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

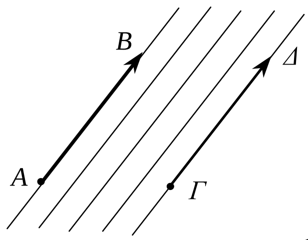


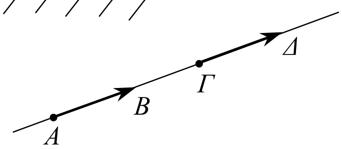
— Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίρροπα**, όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{\Gamma\Delta}}$.



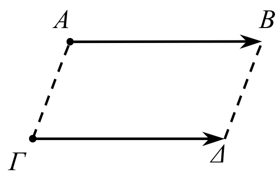
Ίσα Διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, γράφουμε $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους και συμβολίζονται με $\vec{0}$.



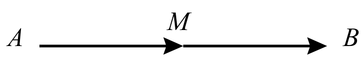


Εύκολα αποδεικνύεται ότι:



- Αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

- Αν M είναι το μέσον του AB, τότε $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ και αντιστρόφως.



Αντίθετα Διανύσματα

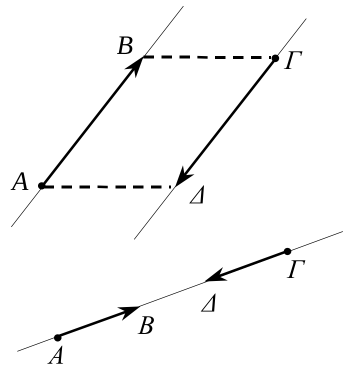
Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, γράφουμε

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta} \text{ ή } \overrightarrow{\Gamma\Delta}=-\overrightarrow{AB}.$$

Είναι φανερό ότι

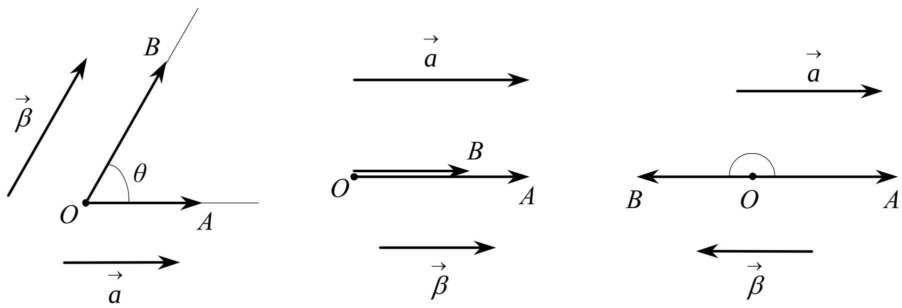
$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

Ειδικότερα, έχουμε $\boldsymbol{\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}}$.



Γωνία δύο Διανυσμάτων

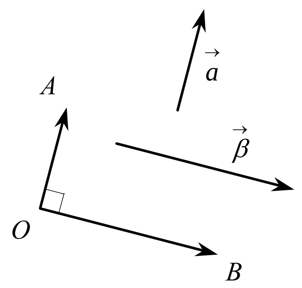
Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.



Την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB, την ονομάζουμε **γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$** και τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})}$ ή $\boldsymbol{(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})}$ ή ακόμα, αν δεν προκαλείται σύγχυση, με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα $\boldsymbol{\theta}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου O. Είναι φανερό επίσης ότι $\boldsymbol{0^0 \le \theta \le 180^0}$ ή σε ακτίνια $\boldsymbol{0 \le \theta \le \pi}$ και ειδικότερα:

- $\theta=0$, αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.
- $\theta=\pi$, αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφουμε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.



Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0 \le \theta \le \pi$. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα, $\vec{0}$, είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή ακόμη και κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω *M* το μέσο της πλευράς *ΑΓ* ενός τριγώνου *ΑΒΓ*. Με αρχή το *M* γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BA}$. Να αποδειχτεί ότι το *A* είναι το μέσο του *ΔΕ*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{AE}$. Πράγματι, επειδή $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$, είναι

$$\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} \qquad (1)$$

Όμως το *M* είναι μέσο του *ΑΓ*. Άρα,

$$\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{AM} \qquad (2)$$

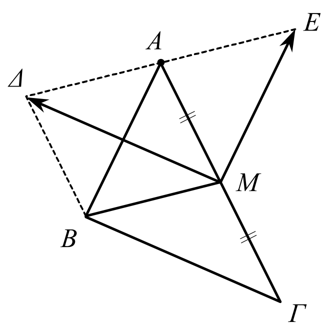
Επομένως, λόγω των (1) και (2), έχουμε $\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{AM}$, οπότε:

$$\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{BM} \qquad (3)$$

Επειδή επιπλέον $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BA}$, έχουμε

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BM} \qquad (4)$$

Έτσι, από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{AE}$. ■

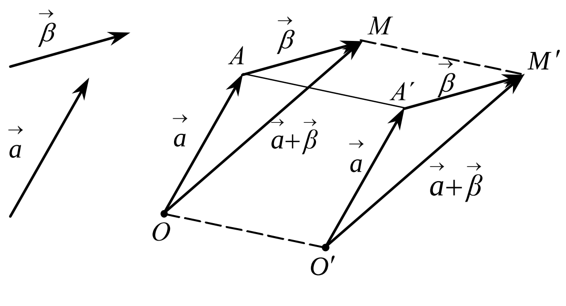


1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

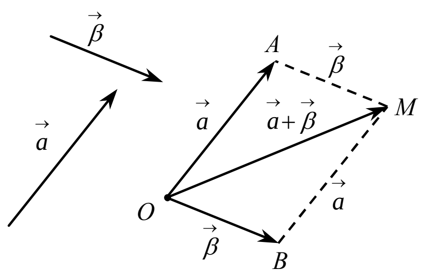
Πρόσθεση Διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το A παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=\vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου O. Πράγματι, αν O' είναι ένα άλλο σημείο και πάρουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{O'A'}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A'M'}=\vec{\beta}$, επειδή $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O'A'}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A'M'}=\vec{\beta}$, έχουμε $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{AA'}$ και $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MM'}$. Επομένως, $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{MM'}$, που συνεπάγεται ότι και $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O'M'}$.



Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με το λεγόμενο *κανόνα του παραλληλόγραμμου*. Δηλαδή, αν με αρχή ένα σημείο O πάρουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, τότε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο OM του παραλληλόγραμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις OA και OB.



Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, αν $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, τότε:

(1)	$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$	(Αντιμεταθετική ιδιότητα)
(2)	$(\alpha+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$	(Προσεταιριστική ιδιότητα)
(3)	$\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$	
(4)	$\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$.	

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Από το προηγούμενο σχήμα έχουμε:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}$$

και

$$\vec{\beta}+\vec{\alpha}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}\ .$$

Επομένως, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$.

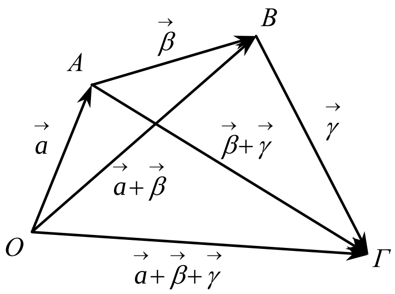
- Από το διπλανό σχήμα έχουμε:

$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$

και

$\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$.

Επομένως, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{a}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$.

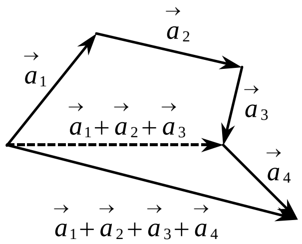


- Οι ιδιότητες (3) και (4) είναι προφανείς. ■

Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να συμβολίζουμε καθένα από τα ίσα αθροίσματα $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, το οποίο θα λέμε άθροισμα των τριών διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$. Το άθροισμα περισσότερων διανυσμάτων $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\ldots,\vec{\alpha}_\nu$, $\nu\geq 3$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+\ldots+\vec{\alpha}_\nu=(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+\ldots+\vec{\alpha}_{\nu-1})+\vec{\alpha}_\nu\ .$$

Για παράδειγμα, $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4 = (\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3) + \vec{\alpha}_4$

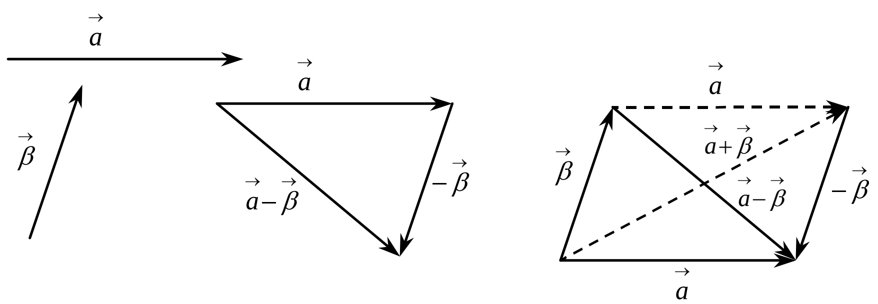


Δηλαδή, για να προσθέσουμε ν διανύσματα $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, ..., \vec{\alpha}_\nu$, τα καθιστούμε διαδοχικά, οπότε το άθροισμά τους θα είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου. Επειδή μάλιστα ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, το άθροισμα δε μεταβάλλεται αν αλλάξει η σειρά των προσθετέων ή αν μερικοί από αυτούς αντικατασταθούν με το άθροισμά τους.

Αφαίρεση Διανυσμάτων

Η διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$. Δηλαδή

$$\boldsymbol{\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})}$$

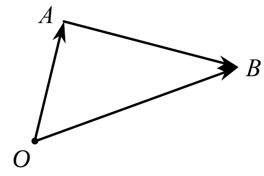


Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο, ώστε $\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha}$. Πράγματι,

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} \Leftrightarrow (-\vec{\beta}) + (\vec{\beta} + \vec{x}) = (-\vec{\beta}) + \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}.$$

Διάνυσμα Θέσεως

Έστω *O* ένα σταθερό σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο *M* του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του *M*** ή **διανυσματική ακτίνα του *M***. Το σημείο *O*, που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.



Αν *O* είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ και επομένως

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}$$

Δηλαδή:

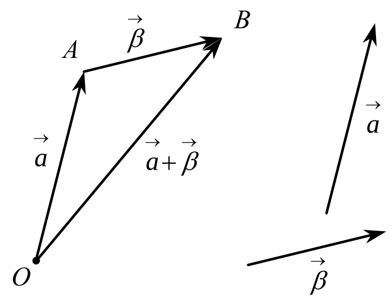
"Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής".

Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε όμως ότι

$$|(OA)-(AB)| \leq (OB) \leq (OA)+(AB)$$

και επομένως



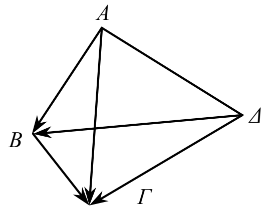
$$\boxed{\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Για τέσσερα σημεία *Α,Β,Γ,Δ* να αποδειχτεί ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{A\Gamma}$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε έχουμε:



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{A\Gamma}\,.$$

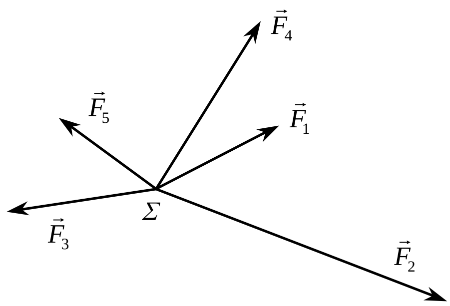
2. Να αποδειχτεί ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=|(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}|\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Οι δυνάμεις $\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_5$ ασκούνται στο σώμα Σ. Ποια δύναμη χρειάζεται, ώστε να μην αφήσει το σώμα Σ να μετακινηθεί από τη θέση του;



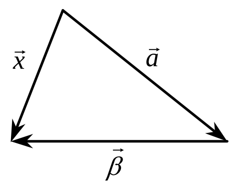
2. Δίνονται τέσσερα σημεία A,B,Γ και Δ και έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσεως ως προς ένα σημείο αναφοράς O. Τι μπορείτε να πείτε για το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ αν:

(i) $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$ (ii) $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$

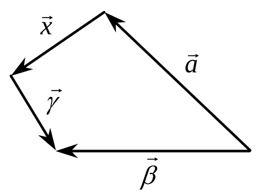
(iii) $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$

3. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:

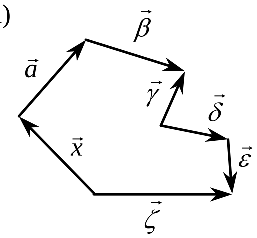
i)



ii)



iii)



4. Αν για δύο τρίγωνα *ΑΒΓ* και *ΑΔΕ* ισχύει $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο *ΒΔΓΕ* είναι παραλληλόγραμμο.

5. Δίνονται τέσσερα σημεία *Α,Β,Γ,Δ* και έστω *Ο,* το μέσο του τμήματος *ΑΓ.* Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

6. Δίνεται κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$. Αν $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

7. Για ένα τυχαίο εξάγωνο $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{P_1P_3}+\overrightarrow{P_2P_4}+\overrightarrow{P_3P_5}+\overrightarrow{P_4P_6}+\overrightarrow{P_5P_1}+\overrightarrow{P_6P_2}=\vec{0}$$

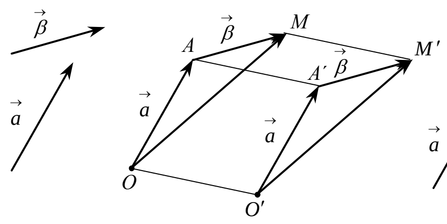
1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

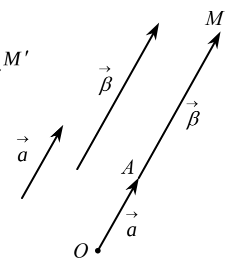
Ορισμός Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

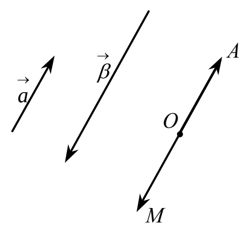
Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$** και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$ και
- έχει μέτρο $|\lambda||\vec{\alpha}|$.

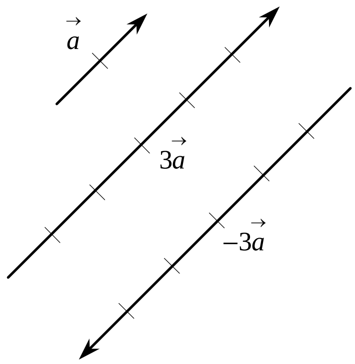
Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.


$\vec{\beta}$
$\vec{a}$
A
M
M'
A'
O
O'


$\vec{a}$
$\vec{\beta}$
M
A
O


$\vec{a}$
$\vec{\beta}$
A
O
M

Για παράδειγμα, αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του διπλανού σχήματος έχει μέτρο 2, τότε το διάνυσμα $3\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο $|3\vec{\alpha}|=3|\vec{\alpha}|=3\cdot 2=6$, ενώ το διάνυσμα $-3\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\alpha}$, αλλά έχει και αυτό μέτρο ίσο με $|-3\vec{\alpha}|=|-3||\vec{\alpha}|=3\cdot 2=6$.



Το γινόμενο $\frac{1}{\lambda}\cdot\vec{\alpha}$ το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{\alpha}}{\lambda}$.

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

Για το γινόμενο πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

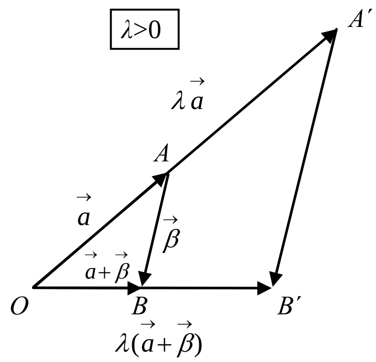
(1)	$\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$
(2)	$(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$
(3)	$\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ*

(1) Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και ότι $\lambda\neq 0$. Παίρνουμε ένα σημείο O και σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}$. Τότε είναι $\overrightarrow{OB}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Σχεδιάζουμε επιπλέον τα διανύσματα

$\overrightarrow{OA'}=\lambda\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB'}=\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$. Επειδή

$$\frac{(OA')}{(OA)}=\frac{(OB')}{(OB)}=|\lambda|,$$



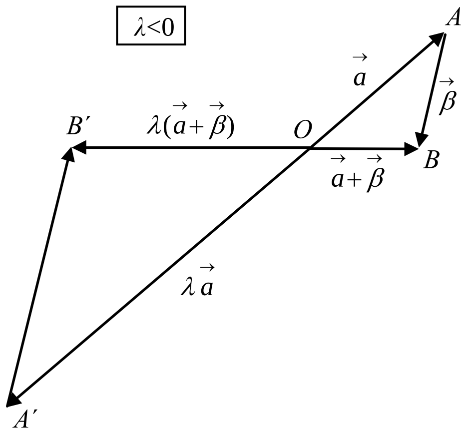
τα τρίγωνα OAB και $OA'B'$ είναι όμοια και επομένως η πλευρά $A'B'$ είναι παράλληλη με την AB και ισχύει

$$\frac{(A'B')}{(AB)}=|\lambda|.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{\beta}$.

Επομένως, επειδή $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B'}$, έχουμε $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$.

Η ιδιότητα ισχύει προφανώς και όταν ένα τουλάχιστον από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι το μηδενικό ή όταν ο αριθμός λ είναι μηδέν.



Η απόδειξη των ιδιοτήτων (2) και (3) αφήνεται ως άσκηση. ■

Ως συνέπεια του ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα και των παραπάνω ιδιοτήτων έχουμε:

(i) $\boldsymbol{\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda=0}$ **ή** $\boldsymbol{\vec{\alpha}=\vec{0}}$

(ii) $\boldsymbol{(-\lambda\vec{\alpha})=\lambda(-\vec{\alpha})=-(\lambda\vec{\alpha})}$

(iii) $\boldsymbol{\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}}$

(iv) $\boldsymbol{(\lambda-\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\alpha}}$

(v) **Αν** $\boldsymbol{\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}}$ **και** $\boldsymbol{\lambda\neq 0}$**, τότε** $\boldsymbol{\vec{\alpha}=\vec{\beta}}$

(vi) **Αν** $\boldsymbol{\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}}$ **και** $\boldsymbol{\vec{\alpha}\neq\vec{0}}$**, τότε** $\boldsymbol{\lambda=\mu}$**.**

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Από τα διανύσματα αυτά "παράγονται", για παράδειγμα, τα διανύσματα $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+5\vec{\beta}$, $\vec{\delta}=-2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ κτλ.

Καθένα από τα διανύσματα αυτά λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Γενικά, ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$.

Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{v}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+5\vec{\gamma}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Όπως είδαμε, αν δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, όπου $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, συνδέονται με τη σχέση $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, τότε τα διανύσματα αυτά είναι παράλληλα. Ισχύει όμως και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$. Πράγματι, αν θέσουμε $\kappa = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$, τότε $|\vec{\alpha}| = \kappa |\vec{\beta}|$. Συνεπώς:

- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = -\kappa\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση υπάρχει λ και μάλιστα μοναδικός (ιδιότητα iv), τέτοιος, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$. Επομένως:

ΘΕΩΡΗΜΑ

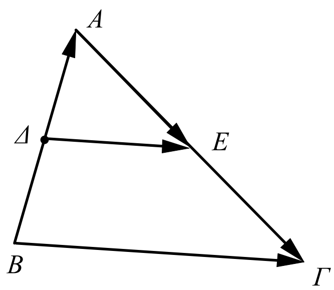
Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}, \ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα αν *Δ* και *Ε* είναι τα μέσα των πλευρών *ΑΒ* και *ΑΓ* του τριγώνου *ΑΒΓ*, έχουμε:

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Gamma} = 2\overrightarrow{\Delta A} + 2\overrightarrow{AE} = 2(\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{AE}) = 2\overrightarrow{\Delta E}.$$

Αφού λοιπόν $\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{\Delta E}$, συμπεραίνουμε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = 2|\overrightarrow{\Delta E}|$, που σημαίνει ότι $\Delta E = \frac{1}{2} B\Gamma$. Ξαναβρίσκουμε δηλαδή τη γνωστή μας από την Ευκλείδεια Γεωμετρία σχέση $\Delta E = \parallel \frac{B\Gamma}{2}$.



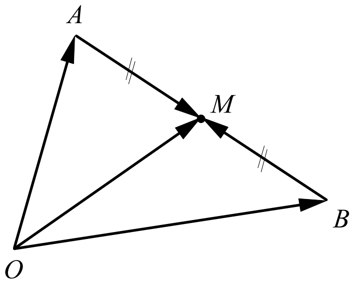
Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος

Ας πάρουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς O. Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M του τμήματος AB έχουμε:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}.$$

Επομένως,

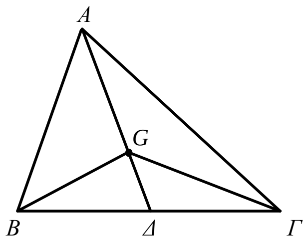
$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Άρα



$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι ένα σημείο G είναι το βαρύκεντρο ενός τριγώνου $AB\Gamma$, αν και μόνο αν ισχύει $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\vec{0}$ και ότι για οποιοδήποτε σημείο O ισχύει $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι αν G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε $AG=2G\Delta$, όπου $A\Delta$ η διάμεσος του τριγώνου. Επομένως, ισχύει $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{G\Delta}$, οπότε έχουμε

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{G\Delta}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GG}=\vec{0}.$$

Αντιστρόφως, αν για ένα σημείο G ισχύει $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\vec{0}$, τότε θα έχουμε $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{G\Delta}=\vec{0}$, όπου Δ το μέσον της $B\Gamma$, οπότε θα ισχύει $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{G\Delta}$. Έτσι, το σημείο G ανήκει στη διάμεσο $A\Delta$ και ισχύει $AG=2G\Delta$. Άρα, το G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου $AB\Gamma$.

Από τη σχέση $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\vec{0}$ έχουμε: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OG}=\vec{0}$. Άρα

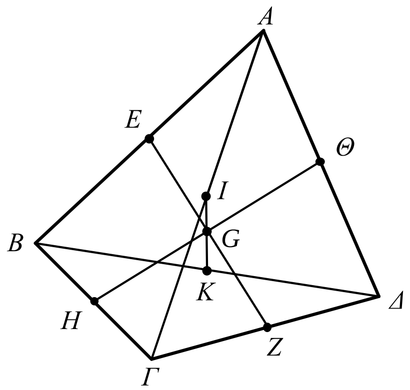
$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})$$

2. Να αποδειχτεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα μέσα των απέναντι πλευρών ενός τετραπλεύρου και τα μέσα των διαγωνίων του διέρχονται από το ίδιο σημείο και διχοτομούνται από το σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ τα διανύσματα θέσεως των κορυφών A, B, Γ, Δ, αντιστοίχως, ενός τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ ως προς ένα σημείο αναφοράς O.
Τα διανύσματα θέσεως των μέσων H της $B\Gamma$ και Θ της $A\Delta$ είναι $\frac{1}{2}(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ και $\frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\delta})$ αντιστοίχως και το διάνυσμα θέσεως του μέσου G του $H\Theta$ είναι το

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\vec{\beta}+\vec{\gamma})+\frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\delta})\right]=\frac{1}{4}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta}).$$



Ομοίως βρίσκουμε ότι το διάνυσμα θέσεως των μέσων των τμημάτων EZ και IK είναι το $\frac{1}{4}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta})$. Άρα τα τμήματα $H\Theta$, EZ και IK διέρχονται από το ίδιο σημείο και διχοτομούνται από αυτό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

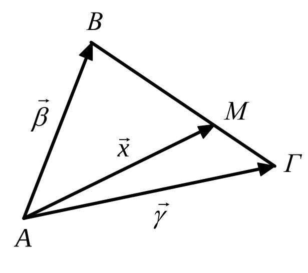
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα, τι μπορείτε να πείτε για το μέτρο και την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}_0=\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\cdot\vec{\alpha}$;

2. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

(i) $\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{\alpha})=\frac{1}{3}(\vec{x}+\vec{\beta})$ (ii) $\vec{x}+3(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=4(\vec{\alpha}-\vec{\beta})-3\vec{x}$.

3. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $(BM)=2(M\Gamma)$, να αποδείξετε ότι $\vec{x}=\frac{1}{3}(\vec{\beta}+2\vec{\gamma})$.

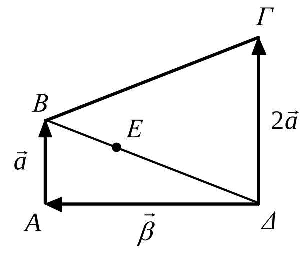


4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε:

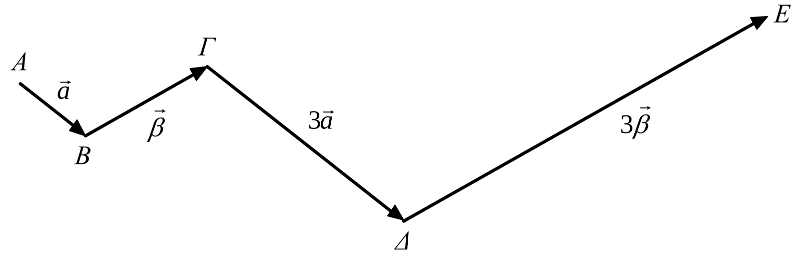
$\mathit{\Delta E}=2EB$, $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=2\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta A}=\vec{\beta}$.

(i) Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta B}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$.

(ii) Από τις εκφράσεις των $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$ ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία A , E και Γ ;



5. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι τα σημεία A, Γ και E είναι συνευθειακά.



6. Αν $\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BK}-2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B\Lambda}+3\overrightarrow{AM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.

7. Αν $A\Delta, BE$ και ΓZ είναι διάμεσοι τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}=\vec{0}$.

8. Αν K, Λ, M είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, ΓA , AB , αντιστοίχως, τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο O ισχύει: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{O\Lambda}+\overrightarrow{OM}$.

9. Αν M και N είναι τα μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$, αντιστοίχως, ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=4\overrightarrow{MN}$.

10. Δίνεται το μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και σημείο Γ τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\mu\overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι $\lambda-\mu=1$.

11. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $\overrightarrow{A\Delta}=\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\kappa\overrightarrow{A\Gamma}$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta E}//\overrightarrow{B\Gamma}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα.

(i) Αν $x\vec{\alpha}+y\vec{\beta}=\vec{0}$, να δείξετε ότι $x=y=0$.

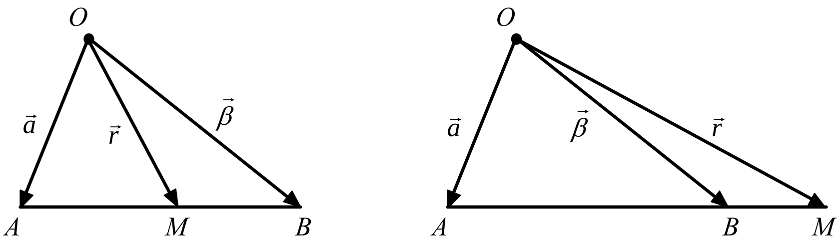
(ii) Αν $x_1\vec{\alpha}+y_1\vec{\beta}=x_2\vec{\alpha}+y_2\vec{\beta}$, να δείξετε ότι $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$.

(iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbf{R}$ τα διανύσματα $\vec{u}=(x-1)\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=(2+3x)\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

2. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία E και Z, ώστε $\overrightarrow{AE}=\kappa\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ}=\lambda\overrightarrow{AB}$ με $\kappa\lambda\neq 0$. Αν $\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}=1$, να αποδείξετε ότι τα σημεία E, Γ και Z είναι συνευθειακά.

3. Να αποδείξετε ότι αν ισχύουν δύο από τις σχέσεις $x\overrightarrow{KA}+y\overrightarrow{KB}+z\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}$, $x\overrightarrow{\Lambda A}+y\overrightarrow{\Lambda B}+z\overrightarrow{\Lambda\Gamma}=\vec{0}$, $x+y+z=0$, τότε θα ισχύει και η τρίτη (το σημείο K είναι διαφορετικό από το Λ).

4. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{r}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων A, B και M αντιστοίχως και $\frac{MA}{MB}=\frac{\kappa}{\lambda}$, να αποδείξετε ότι αν το M είναι εσωτερικό του AB, τότε $\vec{r}=\frac{\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}}{\lambda+\kappa}$, ενώ αν το M είναι εξωτερικό του AB, τότε $\vec{r}=\frac{\lambda\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}}{\lambda-\kappa}$.



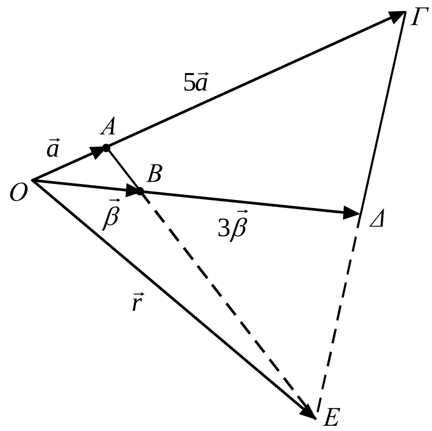
5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ένα σημείο Σ. Βρίσκουμε τα συμμετρικά Δ, E και Z του Σ ως προς τα μέσα K, Λ και M των πλευρών $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB αντιστοίχως. Αν G και G' τα βαρύκεντρα των τριγώνων $AB\Gamma$ και ΔEZ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Σ, G και G' είναι συνευθειακά.

6. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και έστω M και N τα μέσα των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι αν $4\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{B\Gamma}$, τότε το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

7. Αν G και G' είναι τα βαρύκεντρα δύο τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}=3\overrightarrow{GG'}$.

8. Δίνονται τα σημεία A, B και Γ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M το διάνυσμα $3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

9. Τα σημεία A, B, Γ και Δ ενός επιπέδου έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $5\vec{\alpha}$ και $3\vec{\beta}$ αντιστοίχως, όπου τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά. Να βρείτε το διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$ του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$.



1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Άξονας

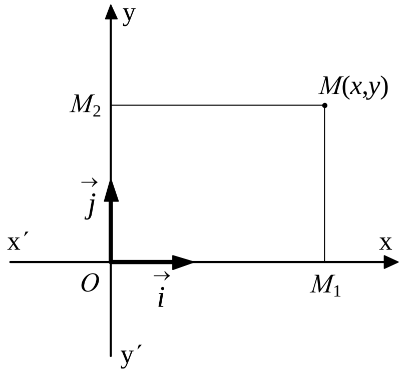
Πάνω σε μια ευθεία $x'x$ επιλέγουμε δύο σημεία O και I, έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{OI}$ να έχει μέτρο 1 και να βρίσκεται στην ημιευθεία Ox. Λέμε τότε ότι έχουμε έναν **άξονα** με **αρχή το O** και **μοναδιαίο διάνυσμα το $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$** και τον συμβολίζουμε με $x'x$. Η ημιευθεία Ox λέγεται **θετικός ημιάξονας Ox**, ενώ η Ox' λέγεται **αρνητικός ημιάξονας Ox'**.

Αν, τώρα, πάνω στον άξονα $x'x$ πάρουμε ένα σημείο M, επειδή $\overrightarrow{OM}//\vec{i}$, θα υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε $\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}$. Τον

αριθμό x τον ονομάζουμε **τετμημένη** του M. Αλλά και αντιστρόφως, από την ισότητα $\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}$ προκύπτει ότι σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχεί μοναδικό σημείο M του άξονα $x'x$ με τετμημένη x. Το σημείο αυτό συμβολίζεται με $M(x)$.

Καρτεσιανό Επίπεδο

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$. Λέμε τότε ότι έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή απλούστερα ένα **σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή ακόμα ένα **καρτεσιανό επίπεδο** και το συμβολίζουμε με $\boldsymbol{Oxy}$. Το σύστημα Oxy λέγεται ορθοκανονικό, γιατί είναι ορθογώνιο και κανονικό. Ορθογώνιο είναι, γιατί οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι κάθετοι, και κανονικό, γιατί τα διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι ισομήκη.



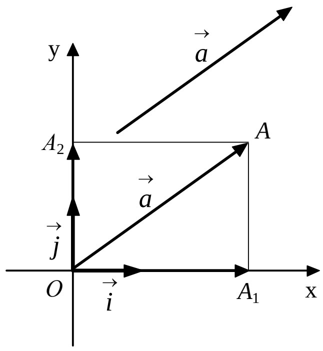
Πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy παίρνουμε ένα σημείο M. Από το M φέρνουμε την παράλληλη στον $y'y$, που τέμνει τον $x'x$ στο M_1, και την παράλληλη στον $x'x$, που τέμνει τον $y'y$ στο M_2. Αν x είναι η τετμημένη του M_1 ως προς τον άξονα $x'x$ και y η τετμημένη του M_2 ως προς τον άξονα $y'y$, τότε ο x λέγεται **τετμημένη** του M και ο y **τεταγμένη** του M. Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται **συντεταγμένες του *M***. Έτσι σε κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος συντεταγμένων.

Αλλά και *αντιστρόφως* σε κάθε ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί μοναδικό σημείο του επιπέδου, το οποίο βρίσκεται ως εξής: Πάνω στον άξονα $x'x$ παίρνουμε το σημείο $M_1(x)$ και στον $y'y$ το σημείο $M_2(y)$. Από τα M_1 και M_2 φέρνουμε παράλληλες στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντιστοίχως, που τέμνονται στο M. Το σημείο M είναι το ζητούμενο. Ένα σημείο M με τετμημένη x και τεταγμένη y συμβολίζεται και με $\boldsymbol{M(x, y)}$ ή απλά με $\boldsymbol{(x, y)}$.

Συντεταγμένες Διανύσματος

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου. Με αρχή το O σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, έχουμε:

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2} \qquad (1)$$



Αν x, y είναι οι συντεταγμένες του A, τότε ισχύει $\overrightarrow{OA_1}=x\vec{i}$ και $\overrightarrow{OA_2}=y\vec{j}$. Επομένως η ισότητα (1) γράφεται

$$\boldsymbol{\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}}$$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι το $\vec{\alpha}$ είναι **γραμμικός συνδυασμός** των $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

Στην παραπάνω κατασκευή οι αριθμοί x και y είναι μοναδικοί. Θα αποδείξουμε τώρα ότι και η έκφραση του $\vec{\alpha}$ ως γραμμικού συνδυασμού των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι μοναδική. Πράγματι, έστω ότι ισχύει και

$$\vec{\alpha} = x'\vec{i} + y'\vec{j}\,.$$

Τότε θα έχουμε

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$
$$(x-x')\vec{i} = (y'-y)\vec{j}$$

Αν υποθέσουμε ότι $x \neq x'$, δηλαδή ότι $x - x' \neq 0$, τότε θα ισχύει

$$\vec{i} = \frac{y'-y}{x-x'}\vec{j}$$

Η σχέση αυτή, όμως, δηλώνει ότι $\vec{i}\,//\,\vec{j}$, που είναι άτοπο, αφού τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δεν είναι συγγραμμικά. Επομένως $x = x'$, που συνεπάγεται ότι και $y = y'$. Ώστε:

“Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$ ”.

Τα διανύσματα $\boldsymbol{x\vec{i}}$ και $\boldsymbol{y\vec{j}}$ λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος $\vec{\alpha}$ κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντιστοίχως, ενώ οι αριθμοί x, y λέγονται συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$ στο σύστημα Oxy. Πιο συγκεκριμένα, ο x λέγεται

τετμημένη του $\vec{\alpha}$ και ο y λέγεται **τεταγμένη** του $\vec{\alpha}$. Από τον τρόπο που ορίστηκαν οι συντεταγμένες ενός διανύσματος προκύπτει ότι:

"Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες".

Καθένα από τα ίσα διανύσματα με τετμημένη x και τεταγμένη y, θα το συμβολίζουμε με το διατεταγμένο ζεύγος $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων

Αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου, τότε μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες του αθροίσματος $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, του γινομένου $\lambda\vec{\alpha}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ και γενικά κάθε γραμμικού συνδυασμού των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Πράγματι, αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε έχουμε:

- $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$
- $\lambda\vec{\alpha} = \lambda(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j}$

Επομένως

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \qquad \text{και} \qquad \lambda\vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\begin{gathered}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\[1em] \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)\end{gathered}}$$

Γενικότερα, για το γραμμικό συνδυασμό $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ έχουμε:

$$\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\mu x_2, \mu y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2).$$

Για παράδειγμα, αν $\vec{\alpha} = (1,-1)$ και $\vec{\beta} = (1,2)$, τότε

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (1,-1) + (1,2) = (2,1),$$
$$2\vec{\alpha} = 2(1,-1) = (2,-2),$$
$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (1,-1) - (1,2) = (1,-1) + (-1,-2) = (0,-3),$$

και $$2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2(1,-1) - (1,2) = (2,-2) + (-1,-2) = (1,-4)$$

Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος

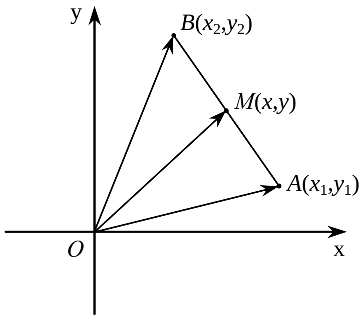
Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB.

Επειδή $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, και

$\overrightarrow{OM} = (x, y)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$,

έχουμε

$$(x, y) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1)+(x_2, y_2)] = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



Επομένως ισχύει

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.}$$

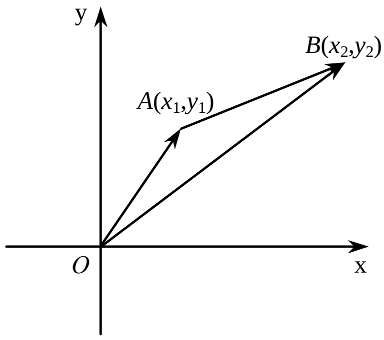
Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

Επειδή, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB} = (x, y)$,

$\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$, και $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$,

έχουμε:



$$(x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Επομένως:

Οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις $$x = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad y = y_2 - y_1.$$

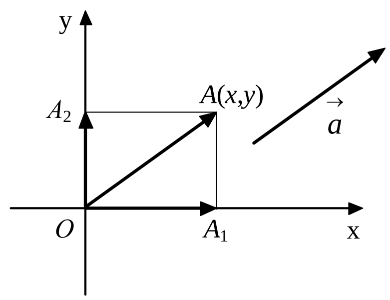
Δηλαδή

$$\text{τετμημένη του } \overrightarrow{AB} = \text{τετμημένη του } B - \text{τετμημένη του } A$$

$$\text{τεταγμένη του } \overrightarrow{AB} = \text{τεταγμένη του } B - \text{τεταγμένη του } A.$$

Για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με αρχή το $A(1,2)$ και πέρας το $B(3,7)$ έχει συντεταγμένες $x = 3 - 1 = 2$ και $y = 7 - 2 = 5$, δηλαδή είναι ίσο με το $\vec{\alpha} = (2,5)$.

Μέτρο Διανύσματος



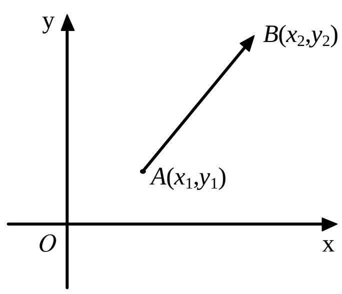
- Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου και A το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, επειδή το σημείο A έχει τετμημένη x και τεταγμένη y, θα ισχύει $(OA_1) = |x|$ και $(OA_2) = |y|$. Έτσι θα έχουμε:

$$|\vec{\alpha}|^2 = (OA)^2 = (OA_1)^2 + (A_1A)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2.$$

Επομένως:

$$\boxed{\text{Αν } \vec{\alpha} = (x, y), \quad \text{τότε} \quad |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (1)$$

Για παράδειγμα, αν $\vec{\alpha} = (5,12)$, τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.



- Ας θεωρήσουμε τώρα δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Επειδή η απόσταση (AB) των σημείων A και B είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, σύμφωνα με τον τύπο (1) θα ισχύει:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2)$$

Επομένως:

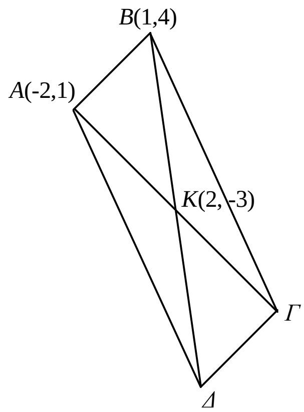
Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με $$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Για παράδειγμα, η απόσταση των σημείων $A(2,-7)$ και $B(5,-3)$ είναι ίση με $(AB) = \sqrt{(5-2)^2 + (-3+7)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν $A(-2,1)$ και $B(1,4)$ είναι οι δύο κορυφές του παραλληλόγραμμου $ΑΒΓΔ$ και $K(2,-3)$ το κέντρο του, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών $Γ$ και $Δ$.

ΛΥΣΗ



Αν $Γ(x_1, y_1)$ και $Δ(x_2, y_2)$ είναι οι δύο άλλες κορυφές του παραλληλόγραμμου, επειδή το *K* είναι το μέσον των *ΑΓ* και *ΒΔ*, έχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + (-2)}{2} = 2 \\ \dfrac{y_1 + 1}{2} = -3 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \dfrac{x_2 + 1}{2} = 2 \\ \dfrac{y_2 + 4}{2} = -3 \end{cases}.$$

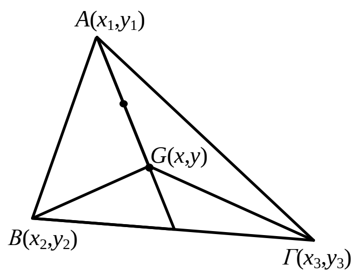
Επομένως,

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ y_1 = -7 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -10 \end{cases}.$$

Άρα, οι συντεταγμένες των κορυφών *Γ* και *Δ* είναι $(6,-7)$ και $(3,-10)$ αντιστοίχως.

2. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους *G* του τριγώνου $ΑΒΓ$, αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών του.

ΛΥΣΗ



Αν (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) είναι οι συντεταγμένες των κορυφών A, B , $Γ$ αντιστοίχως και

(x,y) είναι οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του $AB\Gamma$, επειδή $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\vec{0}$ (Εφαρμ. 1 § 1.3), θα έχουμε:

$$(x_1-x, y_1-y)+(x_2-x, y_2-y)+(x_3-x, y_3-y)=(0,0)$$
$$(x_1+x_2+x_3-3x, y_1+y_2+y_3-3y)=(0,0)$$
$$x_1+x_2+x_3-3x=0 \quad \text{και} \quad y_1+y_2+y_3-3y=0\,.$$

Άρα
$$\boldsymbol{x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}}, \qquad \boldsymbol{y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}}\,.$$

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου.

— Αν τα διανύσματα είναι παράλληλα και υποθέσουμε ότι $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε θα υπάρχει $\lambda\in\mathbf{R}$, τέτοιος, ώστε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$. Επομένως, θα έχουμε $(x_1,y_1)=\lambda(x_2,y_2)$ ή ισοδύναμα:
$$x_1=\lambda x_2 \quad \text{και} \quad y_1=\lambda y_2\,,$$
οπότε θα ισχύει $x_1y_2-y_1x_2=\lambda x_2y_2-\lambda y_2x_2=0$ ή ισοδύναμα $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$.

— Αν $\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε θα ισχύει $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$.

Δείξαμε δηλαδή ότι αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, τότε
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0\,.$$

- *Αντιστρόφως*, αν $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ θα είναι παράλληλα. Πράγματι, επειδή $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$, έχουμε $x_1y_2=x_2y_1$.

Επομένως,

— Αν $x_2\neq 0$, τότε $y_1=\dfrac{x_1}{x_2}y_2$, οπότε, αν θέσουμε $\dfrac{x_1}{x_2}=\lambda$, θα έχουμε
$$x_1=\lambda x_2 \quad \text{και} \quad y_1=\lambda y_2\,.$$

Άρα, $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και συνεπώς $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$.

— Αν $x_2 = 0$, τότε $x_1 y_2 = 0$, οπότε αν $x_1 = 0$, τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ θα είναι παράλληλα προς τον άξονα των τεταγμένων, άρα και μεταξύ τους παράλληλα, ενώ, αν $y_2 = 0$, τότε το $\vec{\beta}$ θα είναι το μηδενικό διάνυσμα και άρα, παράλληλο προς το $\vec{\alpha}$.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

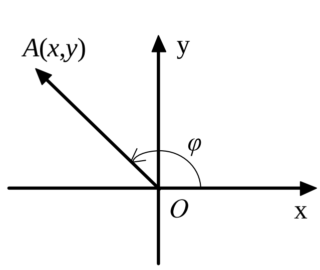
Την ορίζουσα $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, που έχει ως 1η τη γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και ως 2η γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\beta}$, τη λέμε **ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$** (με τη σειρά που δίνονται) και θα τη συμβολίζουμε με $\mathbf{det}(\vec{\alpha},\vec{\beta})$. Έτσι, η παραπάνω ισοδυναμία διατυπώνεται ως εξής:

$$\boxed{\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 0}$$

Για παράδειγμα:
— Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, -1)$ και $\vec{\beta} = (3, -\sqrt{3})$ είναι παράλληλα, αφού $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 3 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$, ενώ

— Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,3)$ και $\vec{\beta} = (-1,2)$ δεν είναι παράλληλα, αφού $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0$.

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος



- Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και A το σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Τη γωνία φ, που διαγράφει ο ημιάξονας Ox αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA, την ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$**. Είναι φανερό ότι

$$0 \leq \varphi < 2\pi .$$

Για τη γωνία φ, όπως είναι γνωστό από την Τριγωνομετρία, αν το $\vec{\alpha}$ δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$, ισχύει

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x}.$$

Το πηλίκο $\frac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος $\vec{\alpha} = (x, y)$, με $x \neq 0$, το λέμε **συντελεστή διεύθυνσης** του $\vec{\alpha}$ και τον συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{\alpha}}$ ή απλώς με λ. Επομένως:

$$\boxed{\lambda = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\varphi}$$

Είναι φανερό ότι

— Αν $y = 0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha} // x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι ο $\lambda = 0$.

— Αν $x = 0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha} // y'y$, τότε **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

- Ας θεωρήσουμε τώρα δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 .$$

Επομένως, η συνθήκη παραλληλίας για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 διατυπώνεται ως εξής:

$$\boxed{\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbf{R}$ για τις οποίες τα σημεία $A(1,0)$, $B(-\mu^2, 3)$ και $\Gamma(-5\mu, 9)$ είναι συνευθειακά.

ΛΥΣΗ

Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (-\mu^2 - 1, 3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (-5\mu - 1, 9)$ είναι παράλληλα, δηλαδή, αν και μόνο αν $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 0$.

Έχουμε λοιπόν

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\mu^2-1 & 3 \\ -5\mu-1 & 9 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -9\mu^2-9+15\mu+3=0$$

$$\Leftrightarrow 3\mu^2-5\mu+2=0$$

$$\Leftrightarrow \mu=1 \quad ή \quad \mu=\frac{2}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ποια είναι η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει:
(i) $|x|=2$ (ii) $|x|<2$ (iii) $|y|>2$ (iv) $|x|=|y|$.

2. Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες $x'x$ και yy':
$A(-1,2)$, $B(3,4)$, $\Gamma(-5,-6)$, $\Delta(\alpha-1,\beta+2)$, $M(x,y)$.

3. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(\lambda^2-4,\ \lambda^2-3\lambda+2)$, $\lambda\in\mathbf{R}$. Για ποια τιμή του λ είναι:
(i) $\vec{\alpha}=\vec{0}$; (ii) $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}\,//\,x'x$;

4. Δίνονται τα διανύσματα
$\vec{\alpha}=(\lambda^2-3\lambda+2,\ 2\lambda^2-3\lambda-2)$ και $\vec{\beta}=(\lambda^2-5\lambda+6,\ -3\lambda^2+7\lambda-2)$. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbf{R}$, ώστε να είναι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

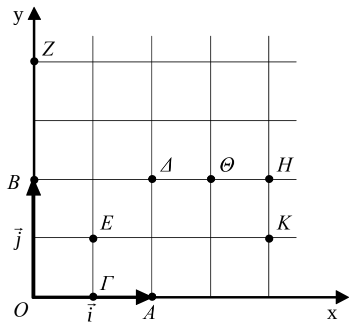
5. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,1)$ και $\vec{\beta}=(4,x)$ να είναι ομόρροπα.

6. Αν $\vec{u}=(3,4)$, ποιο διάνυσμα είναι συγγραμμικό με το $\vec{u}$ και έχει διπλάσιο μέτρο από το $\vec{u}$;

7. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων είναι $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$. Να εκφράσετε ως συνάρτηση την $\vec{i}$ και $\vec{j}$:

α) Τα διανύσματα θέσεως των σημείων Γ, Δ, E, Z, K και H.

β) Τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{H\Delta}$, $\overrightarrow{K\Delta}$, $\overrightarrow{H\Theta}$, $\overrightarrow{ZA}$ και $\overrightarrow{KZ}$.



8. Δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$ και $B(-9,-2)$. Να βρείτε (i) Το σημείο του άξονα $x'x$ που ισαπέχει από τα A και B (ii) Το σημείο του άξονα yy' που ισαπέχει από τα A και B.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν τα σημεία $K\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, $\Lambda\left(3,\frac{7}{2}\right)$, $M\left(4,\frac{5}{2}\right)$, $N(3,1)$ και $\Xi\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ είναι τα μέσα των πλευρών AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE και EA, αντιστοίχως, του πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του πενταγώνου.

2. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων οι τετμημένες δύο σημείων A και B είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-(\lambda^2-4\lambda+3)x-17=0$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbf{R}$, ώστε το μέσον του τμήματος AB να έχει τετμημένη ίση με 4.

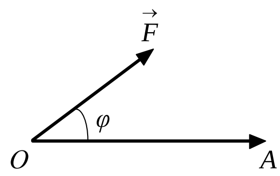
3. Δίνονται τα σημεία $M_1(\kappa_1,\lambda_1)$, $M_2(\kappa_2,\lambda_2)$, $M_3(\kappa_3,\lambda_3)$ και $M_4(\kappa_4,\lambda_4)$. Να εξετάσετε πότε τα σημεία αυτά είναι τα μέσα των διαδοχικών πλευρών τετραπλεύρου.

4. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,x,y$ να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2}+\sqrt{(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2}\geq\sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2}\,.$$

5. Δίνονται δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ενός επιπέδου. Να αποδείξετε ότι οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{r}$ του επιπέδου αυτού μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κατά μοναδικό τρόπο.

1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



Γνωρίζουμε ότι το έργο που παράγεται από μια δύναμη $\vec{F}$ όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από το O στο A είναι ίσο με το γινόμενο $|\vec{F}|\cdot(OA)\cdot$συνφ. Το γινόμενο αυτό συμβολίζεται με $\vec{F}\cdot\overrightarrow{OA}$ και λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** της δύναμης $\vec{F}$ με το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$. Γενικότερα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}$ τον πραγματικό αριθμό

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\varphi,$$

όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

- Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=0$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=8$ και $\varphi=\frac{\pi}{3}$ είναι

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3\cdot8\cdot\text{συν}\frac{\pi}{3}=3\cdot8\cdot\frac{1}{2}=12\,.$$

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι εξής:

- $\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=\vec{\boldsymbol{\beta}}\cdot\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
- Αν $\vec{\boldsymbol{\alpha}}\perp\vec{\boldsymbol{\beta}}$, τότε $\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{0}$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{\boldsymbol{\alpha}}\upuparrows\vec{\boldsymbol{\beta}}$, τότε $\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=|\vec{\boldsymbol{\alpha}}|\cdot|\vec{\boldsymbol{\beta}}|$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{\boldsymbol{\alpha}}\uparrow\downarrow\vec{\boldsymbol{\beta}}$, τότε $\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{\beta}}=-|\vec{\boldsymbol{\alpha}}|\cdot|\vec{\boldsymbol{\beta}}|$ και αντιστρόφως.

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\boldsymbol{\alpha}}^2$ και λέγεται **τετράγωνο του** $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$. Έχουμε: $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\text{συν}0=|\alpha|^2$. Επομένως

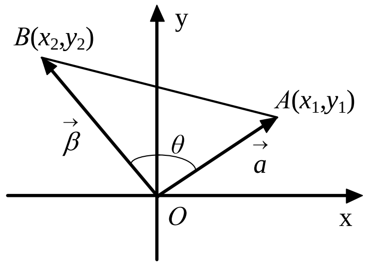
$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^2=|\vec{\boldsymbol{\alpha}}|^2\,.$$

Ειδικότερα, για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ του καρτεσιανού επίπεδου ισχύουν:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0 \quad \text{και} \quad \vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=1$$

Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να εκφράσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους. Με αρχή το O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB έχουμε την ισότητα



$$(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2-2(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B,$$

η οποία ισχύει και στην περίπτωση που τα σημεία O,A,B είναι συνευθειακά. Όμως είναι

$$(AB)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,\ (OA)^2=x_1^2+y_1^2 \text{ και } (OB)^2=x_2^2+y_2^2.$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B$$

$$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B$$

και επειδή $(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, έχουμε τελικά:

$$\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2}$$

Δηλαδή:

"Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους".

Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}=(-3,4)$ και $\vec{\beta}=(2,-1)$ είναι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(-3)\cdot 2+4(-1)=-10$.

Με τη βοήθεια της αναλυτικής έκφρασης του εσωτερικού γινομένου θα αποδείξουμε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

- $\boldsymbol{\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}),\ \lambda\in\mathbf{R}}$
- $\boldsymbol{\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}$ (Επιμεριστική Ιδιότητα)
- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$ όπου $\lambda_1=\lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2=\lambda_{\vec{\beta}}$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta}\,//\,y'y)$

Πράγματι, αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$, τότε έχουμε:

- $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)(x_2,y_2)=(\lambda x_1)x_2+(\lambda y_1)y_2=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

και

$$\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=(x_1,y_1)(\lambda x_2,\lambda y_2)=x_1(\lambda x_2)+y_1(\lambda y_2)=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}).$$

Άρα,

$$(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$

- $$\begin{aligned}\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})&=(x_1,y_1)(x_2+x_3,y_2+y_3)=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)\\&=(x_1x_2+x_1x_3)+(y_1y_2+y_1y_3)=(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1x_3+y_1y_3)\\&=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}.\end{aligned}$$
- $$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Leftrightarrow y_1y_2=-x_1x_2\Leftrightarrow\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2}=-1\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$$

Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta$ και επομένως,

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}}.$$

Είναι όμως

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2,\quad |\vec{\alpha}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\quad \text{και}\quad |\vec{\beta}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

Επομένως,

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}}$$

Για παράδειγμα, αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,1)$, τότε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1\cdot3+2\cdot1}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{οπότε}\ \theta=\frac{\pi}{4}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, να αποδειχτεί ότι:**
(i) $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ (ii) $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\leq\vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2$
Πότε ισχύουν οι ισότητες;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε έχουμε:

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=\left||\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\right|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot|\sigma\upsilon\nu\theta|\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο, αν $\sigma\upsilon\nu\theta=\pm1$, δηλαδή, μόνο αν $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$.

(ii) Επίσης, έχουμε $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|^2\leq(|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|)^2=|\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$.

Η ισότητα ισχύει, όπως και προηγουμένως, μόνο όταν $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$.

2. **Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν μέτρα $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}|=1$ και σχηματίζουν γωνία $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{x}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{y}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.**

ΛΥΣΗ

Αν θ είναι η γωνία των $\vec{x}$ και $\vec{y}$, τότε $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}$. Αρκεί, επομένως, να υπολογίσουμε το $\vec{x}\cdot\vec{y}$ και τα μέτρα των $\vec{x},\vec{y}$.

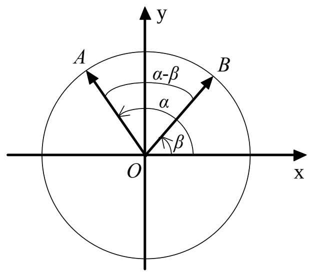
Έχουμε λοιπόν

- $\vec{x}\cdot\vec{y}=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\beta}|^2=3-1=2$.
- $$\begin{aligned}|\vec{x}|^2=\vec{x}^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2&=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}\\&=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\varphi\\&=3+1+2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}|\vec{y}|^2=\vec{y}^2=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2&=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}\\&=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\varphi\\&=3+1-2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1.\end{aligned}$$

Άρα, $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{2}{\sqrt{7}\cdot1}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$, οπότε $\theta\cong41^0$

3. **Να αποδειχτεί ότι** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}$, **όπου** $\boldsymbol{0\le\beta<\alpha\le\pi}$ **.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Αν στον τριγωνομετρικό κύκλο τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες α και β αντιστοίχως, τότε θα είναι $\overrightarrow{OA}=(\sigma\upsilon\nu\alpha,\eta\mu\alpha)$ και $\overrightarrow{OB}=(\sigma\upsilon\nu\beta,\eta\mu\beta)$.

Επομένως, θα έχουμε:

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=1\cdot1\cdot\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$

και

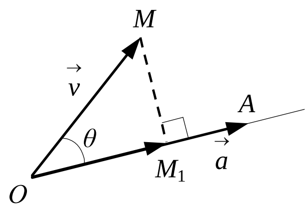
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\sigma\upsilon\nu\alpha,\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\beta,\eta\mu\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$.

Άρα,

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$

Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα

Έστω $\vec{\alpha},\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$. Από το M φέρνουμε κάθετο στη διεύθυνση του $\overrightarrow{OA}$ και έστω M_1 το ίχνος της καθέτου.



Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ λέγεται **προβολή του** $\boldsymbol{\vec{v}}$ **στο** $\boldsymbol{\vec{\alpha}}$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}}$. Δηλαδή,

$$\overrightarrow{OM_1}=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v} .$$

Αποδεικνύεται ότι η προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου O.

Για το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$ έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M})=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}+\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{M_1M}=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}=\vec{\alpha}\cdot\ \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$$

Επομένως:

$$\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$, αν $|\vec{\alpha}|=\frac{1}{2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{3}$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$ είναι ίση με $\varphi=\frac{\pi}{6}$.**

ΛΥΣΗ

Έστω $\vec{v}_1=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$. Τότε θα ισχύει $\vec{v}_1=\lambda\vec{\alpha}$. Επειδή $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προ}\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\vec{v}_1 &\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\lambda\vec{\alpha}\\ &\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{\alpha}^2\\ &\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{v}|\,\text{συν}\varphi=\lambda\cdot|\vec{\alpha}|^2\\ &\Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\lambda\cdot\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \lambda=3\end{aligned}$$

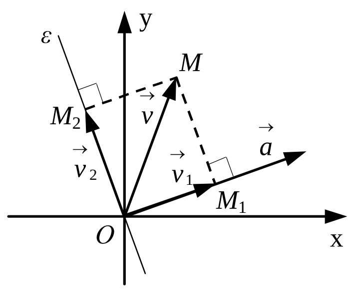
Άρα, $\vec{v}_1=3\vec{\alpha}$.

2. **Δίνονται τα διανύματα $\vec{\alpha}=(3,1)$ και $\vec{v}=(1,2)$. Να αναλυθεί το $\vec{v}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.**

ΛΥΣΗ

Έστω ε η ευθεία η κάθετη στη διεύθυνση του $\vec{\alpha}$. Από το πέρας M του $\vec{v}$ φέρνουμε τις κάθετες MM_1 και MM_2 στη διεύθυνση του $\vec{\alpha}$ και στην ε αντιστοίχως και έστω $\overrightarrow{OM}_1=\vec{v}_1$ και $\overrightarrow{OM}_2=\vec{v}_2$. Έχουμε

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2. \qquad (1)$$



Το διάνυσμα $\vec{v}_1$ είναι η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ και επειδή $\vec{v}_1 // \vec{\alpha}$, υπάρχει $\lambda\in\mathbf{R}$, τέτοιο ώστε $\text{προ}\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}=(3\lambda,\lambda)$. Όμως $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προ}\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$ και επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{gathered}(3,1)\cdot(1,2)=(3,1)\cdot(3\lambda,\lambda)\\ 3\cdot1+1\cdot2=3\cdot3\lambda+1\cdot\lambda\\ 5=10\lambda\\ \lambda=\frac{1}{2}.\end{gathered}$$

Συνεπώς, $\vec{v}_1=\frac{1}{2}\vec{\alpha}=\frac{1}{2}(3,1)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{v}_2=\vec{v}-\vec{v}_1=(1,2)-\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $\vec{\alpha}=(-1,3)$ και $\vec{\beta}=(2,5)$, τότε

(i) Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $(2\vec{\alpha})\cdot(-3\vec{\beta})$ και $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

(ii) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$, ώστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}=(\kappa,\lambda)$ και $\vec{\beta}$ να είναι ίσο με μηδέν. Ποια η σχέση όλων των διανυσμάτων $\vec{u}$ στην περίπτωση αυτή;

2. Αν $\vec{u}=(1,2)$, $\vec{v}=(4,2)$ και $\vec{w}=(6,0)$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $\vec{u}\cdot(7\vec{v}+\vec{w})$, $|\vec{u}|(\vec{v}\cdot\vec{w})$, $|(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}|$ και $(|\vec{u}|\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$.

3. Αν $\vec{\alpha}=(1,0)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$, να βρείτε τον $\lambda\in\mathbf{R}$, ώστε:

(i) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα

(ii) Τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

4. Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο $\vec{u}=(3,-2)$ και έχουν μέτρο ίσο με 1.

5. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε τον $\kappa\in\mathbf{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{u}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

6. Αν $\vec{\alpha}=(\kappa,1)$ και $\vec{\beta}=(4,3)$, να βρείτε τον $\kappa\in\mathbf{R}$ ώστε να ισχύει:

(i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ (ii) $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{4}$ (iii) $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$.

7. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

8. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\Leftrightarrow \text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}.$$

9. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha}$ και $\vec{v}=|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}-|\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha}$ είναι κάθετα.

10. Να αποδείξετε ότι για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, το διάνυσμα $\vec{v}=\vec{\beta}^2\cdot\vec{\alpha}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$.

11. Δίνονται τα σημεία $A(3,-2), B(6,-4), \Gamma(1,5)$ και $\Delta(-1,2)$. Να υπολογίσετε

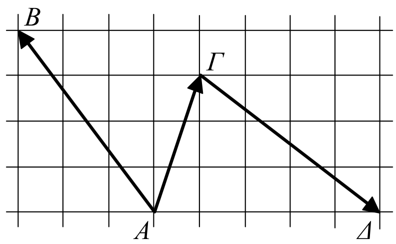
(i) Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(ii) Τι συμπεραίνετε για τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$;

12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-4)$ και $\vec{\beta}=(-8,5)$. Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

13. Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με τα διανύσματα $5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, αν $|\vec{\alpha}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=45^0$.

14. Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε την παράσταση $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



15. Να εξετάσετε πότε ισχύει:

(i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

(ii) $\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και μη συγγραμμικά. Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ισχύει:

$$\lambda^2\vec{\alpha}^2+2\lambda\mu(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\mu^2\vec{\beta}^2\geq 0.$$

Πότε ισχύει το "=";

2. Να αποδείξετε ότι:

(i) $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2|\vec{u}|^2+2|\vec{v}|^2$ (iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{4}|\vec{u}+\vec{v}|^2-\dfrac{1}{4}|\vec{u}-\vec{v}|^2$.

3. Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Ο φορέας του διανύσματος $\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

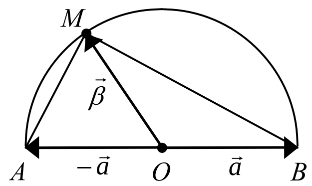
(ii) Ο φορέας του διανύσματος $\vec{v}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}-|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί την παραπληρωματική γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

4. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $|\vec{\gamma}|=3$ και $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

5. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\kappa,\lambda)$ και $\vec{\beta}=(\mu,\nu)$ είναι κάθετα και έχουν μέτρα ίσα με τη μονάδα, να δείξετε ότι $(\kappa\nu-\lambda\mu)^2=1$.

6. Να αποδείξετε ότι $-1\leq\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\leq 1$.

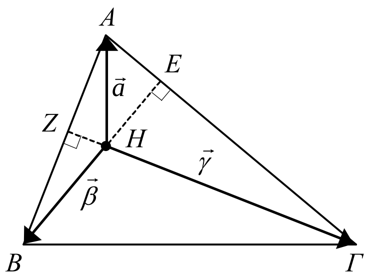
7. Σε ημικύκλιο με διάμετρο AB και κέντρου O παίρνουμε σημείο M.



(i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(ii) Να βρείτε το γινόμενο $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$. Τι συμπεραίνετε για τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$; Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχτεί;

8. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα δύο ύψη του BE και ΓZ τέμνονται στο H. Έστω $\overrightarrow{HA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{HB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{H\Gamma}=\vec{\gamma}$.



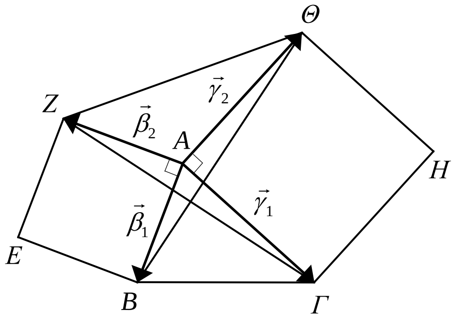
(i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

(ii) Να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

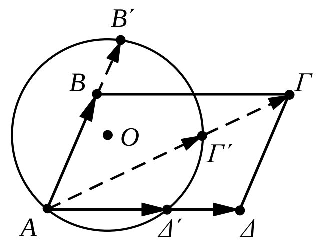
(iii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$.

Με τη βοήθεια της ισότητας αυτής να δείξετε ότι $AH\perp B\Gamma$. Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχτεί;

9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και εξωτερικώς αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $ABEZ$ και $A\Gamma H\Theta$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Theta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ και να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{B\Theta}\cdot\overrightarrow{Z\Gamma}$. Τι συμπεραίνετε για τα τμήματα $B\Theta$ και ΓZ ;



10. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και κύκλος κέντρου O που διέρχεται από την κορυφή A και τέμνει τις ευθείες $AB, A\Gamma$ και $A\Delta$ στα B', Γ' και Δ' αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Delta'}=\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma'}$.



11. Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο M του επιπέδου του. Αν μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το M τέμνει τον κύκλο στα A και B, να αποδείξετε ότι το γινόμενο $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ είναι σταθερό. (Το γινόμενο αυτό λέγεται *δύναμη του σημείου* M *ως προς τον κύκλο* O).

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ, μ με $|\kappa|+|\lambda|+|\mu|\neq 0$, τέτοιοι, ώστε

$$\kappa+\lambda+\mu=0 \quad \text{και} \quad \kappa\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+\mu\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0},$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά και αντιστρόφως.

2. Αν για το σημείο M του επιπέδου ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{A\Gamma}+\mu\overrightarrow{BA}$, να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$.

3. Έστω O και A δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με $|\overrightarrow{OA}|=3$. Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία M του επιπέδου για τα οποία είναι $\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OA})=7$;

4. Δίνονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Αν υπάρχει $\lambda \in \mathbf{R}$, τέτοιος, ώστε $|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=1$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου $OA\Gamma B$ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ είναι μικρότερο ή ίσο του $|\vec{\beta}|$.

5. Έστω O το περίκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$ (δηλαδή το σημείο για το οποίο ισχύει $OA=OB=O\Gamma$), και έστω, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τα διανύσματα θέσεως των κορυφών A, B και Γ αντιστοίχως με σημείο αναφοράς το O.

(i) Να δείξετε ότι το σημείο H με διάνυσμα θέσεως $\overrightarrow{OH}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(ii) Να βρείτε το διάνυσμα θέσεως του βαρύκεντρου του τριγώνου $AB\Gamma$ με σημείο αναφοράς το O.

(iii) Να αποδείξετε ότι το περίκεντρο O, το βαρύκεντρο G και το ορθόκεντρο H ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι συνευθειακά σημεία και ότι G διαιρεί το τμήμα OH σε λόγο $\frac{1}{2}$.

6. Τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και $\vec{x}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$.

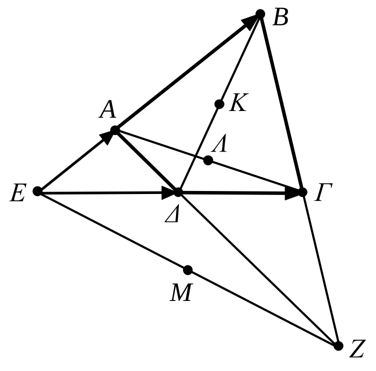
(i) Να αποδείξετε ότι $(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1)(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

(ii) Αν $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\neq 1$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

7. Τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ οι πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο E και οι πλευρές $B\Gamma$ και $A\Delta$ τέμνονται στο Z. Αν $\overrightarrow{EA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{EB}=\kappa\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{E\Delta}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{E\Gamma}=\lambda\vec{\alpha}$, τότε

(i) Να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{\alpha},\vec{\beta},\kappa$ και λ τις διανυσματικές ακτίνες ως προς το E των σημείων K, Λ και M, που είναι μέσα των $B\Delta$, $A\Gamma$ και EZ αντιστοίχως.

(ii) Να δείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.



8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E και Z των πλευρών του $B\Gamma$, ΓA και AB αντιστοίχως, ώστε να ισχύει $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{\Gamma E}{EA}=\frac{AZ}{ZB}=\frac{\mu}{\nu}$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Δίνεται ότι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος. Καθεμία από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστή ή λάθος. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το γράμμα Σ, αν είναι λάθος κυκλώστε το Λ.

(i) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ Σ Λ (ii) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Delta}$ Σ Λ

(iii) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ Σ Λ (iv) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{\Delta\Gamma}|$ Σ Λ

(v) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Delta}$ Σ Λ (vi) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{B\Gamma}|$ Σ Λ

2. Αν A, B, Γ και Δ είναι τέσσερα σημεία, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

(i) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=...$ (vi) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{B\Delta}=...$

(ii) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta B}=...$ (vii) $\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{A\Delta}=...$

(iii) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=...$ (viii) $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{BA}=...$

(iv) $\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}=...$ (ix) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{A\Gamma}=...$

(v) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=...$

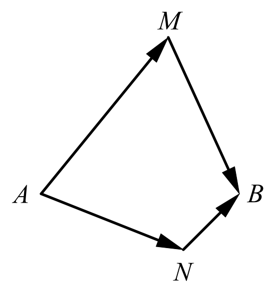
3. Αν O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλόγραμμου $ΑΒΓΔ$, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

(i) $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Delta}=...$ (iv) $2\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{B\Gamma}-2\overrightarrow{AB}=...$

(ii) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\Delta B}=...$ (v) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=...$

(iii) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{\Gamma O}=...$

4. Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



i) $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right| > \left|\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}\right|$

ii) $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}\right|$

iii) $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right| < \left|\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}\right|$

5. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο δίνεται το σημείο $A(-3,-2)$. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

(i) Συμμετρικό του A ως προς τον $x'x$: $A_1(...,...)$

(ii) Συμμετρικό του A ως προς τον $y'y$: $A_2(...,...)$

(iii) Συμμετρικό του A ως προς την αρχή O: $A_3(...,...)$

(iv) Συμμετρικό του A ως προς τη διχοτόμο της $x\hat{O}y$: $A_4(...,...)$

6. Δίνονται τα σημεία $A(3,1), B(6,5), \Gamma(-4,-2), \Delta(3,-3)$ και $E(-3,5)$. Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε διάνυσμα της πρώτης στήλης με τις συντεταγμένες του στη δεύτερη στήλη

Διάνυσμα	Συντεταγμένες διανύσματος
$\overrightarrow{AB}$	$(0,-4)$
$\overrightarrow{A\Gamma}$	$(3,4)$
$\overrightarrow{AE}$	$(-7,3)$
$\overrightarrow{A\Delta}$	$(-6,4)$
$\overrightarrow{BE}$	$(-9,0)$

7. Δίνονται τα σημεία $A(3,2)$, $B(-4,5)$, $\Gamma(-3,-2)$, $\Delta(3,-4)$. Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε τμήμα της πρώτης στήλης με τις συντεταγμένες του μέσου του στη δεύτερη στήλη.

Τμήμα	Συντεταγμένες μέσου
AB	$(0,0)$
$B\Gamma$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$
$\Gamma\Delta$	$\left(-\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$
$A\Gamma$	$(0,-3)$

8. Να βάλετε σε κύκλο τον αριθμό που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

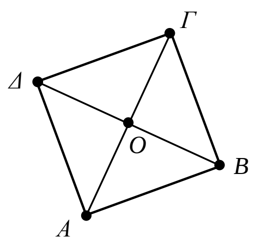
(i) Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(3,-2)$ και τα σημεία $A(4,-1)$, $B(-2,7)$, $\Gamma(0,3)$ και $\Delta(1,5)$. Ποιο από τα διανύσματα είναι ίσο με το $\vec{\alpha}$:

1. $\overrightarrow{AB}$ 2. $\overrightarrow{A\Gamma}$ 3. $\overrightarrow{\Delta B}$ 4. $\overrightarrow{B\Delta}$ 5. $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

(ii) Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(3,-2)$. Ποιο από τα διανύσματα είναι παράλληλο με το $\vec{\alpha}$:

1. $\vec{\beta}=(8,4)$ 2. $\vec{\gamma}=(-4,-2)$ 3. $\vec{\delta}=(-6,3)$.

9. Δίνονται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με κέντρο O και πλευρά α. Να βρείτε ως συνάρτηση του α τα εσωτερικά γινόμενα:



(i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AΔ}$ (iv) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OΓ}$

(ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AΓ}$ (v) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ΔΓ}$

(iii) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ (vi) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ΓΔ}$.

10. Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ έχουν μέτρα 2 και 3 αντιστοίχως. Να βρείτε το γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$, αν η γωνία των διανυσμάτων αυτών είναι: i) 0^0 ii) 30^0 iii) 60^0 iv) 90^0 v) 120^0 vi) 150^0 vii) 180^0.

11. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

Αν $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ και $\vec{u}\neq\vec{0}$, τότε A. $\vec{v}=\vec{w}$ B. $\vec{v}\,//\,\vec{w}$ Γ. $\vec{u}\perp\vec{v}-\vec{w}$ Δ. $\vec{u}\perp\vec{v}+\vec{w}$.

12. Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε ζεύγος διανυσμάτων της πρώτης στήλης με το είδος της γωνίας τους που αναφέρονται στη δεύτερη στήλη.

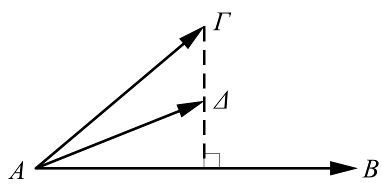
	Διανύσματα	Γωνία
1.	$\vec{u}=(7,5),\ \vec{v}=(-1,2)$	ορθή
2.	$\vec{u}=(-3,4),\ \vec{v}=(2,-1)$	
3.	$\vec{u}=(3,5),\ \vec{v}=(6,0)$	οξεία
4.	$\vec{u}=(0,-1),\ \vec{v}=(-5,4)$	
5.	$\vec{u}=(-2,3),\ \vec{v}=(3,2)$	αμβλεία
6.	$\vec{u}=(\kappa,\lambda),\ \vec{v}=(-\lambda,\kappa)$	

13. Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

(i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AΔ} > \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AΓ}$

(ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AΔ} < \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AΓ}$

(iii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AΔ} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AΓ}$



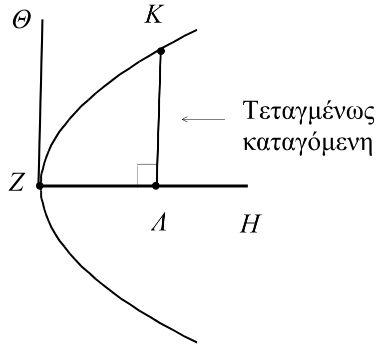
2 Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Εισαγωγή

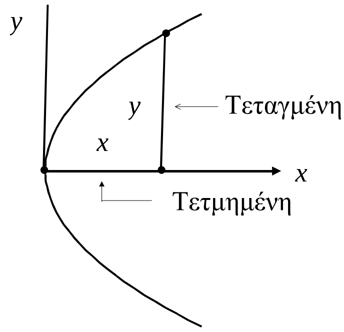
Η ιδέα της χρησιμοποίησης ενός συστήματος συντεταγμένων για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου πάνω σε μια επιφάνεια προέρχεται από την Γεωγραφία και ήταν γνωστή στους αρχαίους γεωγράφους. Στην εφαρμογή αυτής της ιδέας στη Γεωμετρία στηρίζεται η έννοια της εξίσωσης μιας καμπύλης, δηλαδή της αλγεβρικής ισότητας που ικανοποιείται από τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης (και μόνο αυτών). Η έννοια αυτή θεωρείται σήμερα τόσο απλή, ώστε η διδασκαλία της να αρχίζει από το Γυμνάσιο. Στην πραγματικότητα όμως η εξέλιξή της χρειάστηκε πολύ χρόνο και υπήρξε το αποτέλεσμα μιας σύνθεσης ανάμεσα στη Γεωμετρία και στην Άλγεβρα, με επαναστατικές συνέπειες για τα Μαθηματικά και τις Θετικές Επιστήμες.

Η ανάγκη και τα πρώτα ίχνη ενός “συστήματος αναφοράς” εμφανίζονται στην αρχαία ελληνική Γεωμετρία κατά τη μελέτη των κωνικών τομών (δηλαδή της παραβολής, της υπερβολής και της έλλειψης, τις οποίες θα μελετήσουμε παρακάτω). Ο Απολλώνιος στο 1ο βιβλίο των “Κωνικών”, αφού ορίζει αυτές τις καμπύλες στερεομετρικά ως τομές του κώνου από ένα επίπεδο, χρησιμοποιεί δύο συγκεκριμένες ευθείες του σχήματος, για να αποδείξει χαρακτηριστικές ιδιότητες κάθε καμπύλης.

Για παράδειγμα, στην παραβολή του διπλανού σχήματος αποδεικνύει ότι αν φέρουμε την κάθετη *ΚΛ* (“τεταγμένως καταγόμενη”) από σημείο της καμπύλης προς τη διάμετρο *ΖΗ*, τότε το τετράγωνο με πλευρά *ΚΛ* είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο που έχει πλευρές *ΖΛ*, *ΖΘ*, όπου *ΖΘ* ένα τμήμα κάθετο στην *ΖΗ* στην κορυφή καμπύλης (το μήκος του οποίου προσδιορίζεται από το είδος του κώνου και από τη θέση του τέμνοντος επιπέδου).



Η σχέση $ΚΛ^2 = ΖΘ \cdot ΖΛ$ "ισοδυναμεί" βέβαια με τη σύγχρονη εξίσωση $y^2 = 2px$ της παραβολής, όπου x, y οι συντεταγμένες των σημείων της ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με άξονες τον άξονα συμμετρίας της παραβολής και την κάθετη σ'αυτόν στην κορυφή της.



Η βασική διαφορά ανάμεσα στην αρχαία και στη σύγχρονη μέθοδο βρίσκεται στο γεγονός ότι η τελευταία χρησιμοποιεί τη συμβολική αναπαράσταση των γεωμετρικών σχέσεων και αξιοποιεί την ευελιξία του αλγεβρικού λογισμού (που εκφράζεται με τη χρήση αρνητικών συντεταγμένων κτλ.). Αυτό το αποφασιστικό βήμα έγινε γύρω στο 1630 από τους R. Descartes και P. Fermat, οι οποίοι επιχείρησαν να χρησιμοποιήσουν στη μελέτη δύσκολων προβλημάτων της αρχαίας ελληνικής Γεωμετρίας τη συμβολική Άλγεβρα που είχε δημιουργηθεί στη διάρκεια του 16ου αιώνα από τους Cardano, Viete κ.ά. Στα έργα των Descartes και Fermat δεν υπάρχουν οι άξονες συντεταγμένων ή οι εξισώσεις των καμπύλων που χρησιμοποιούμε σήμερα, αλλά περιγράφεται με συστηματικό τρόπο η διαδικασία αναγωγής ενός γεωμετρικού προβλήματος σε αλγεβρικό (ή αντίστροφα). Ιδιαίτερη επίδραση είχε το έργο του Descarte "La Géométrie" (1637), στο οποίο –ακριβώς για να γίνει πιο αποτελεσματική η χρήση του αλγεβρικού λογισμού στη Γεωμετρία– εισάγονται νέοι συμβολισμοί (όπως, για παράδειγμα, η εκθετική γραφή των δυνάμεων), που φέρνουν ουσιαστικά την Άλγεβρα στη σημερινή μορφή της.

Ύστερα από την πρώτη σύνθεση της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας, οι εξελίξεις υπήρξαν ραγδαίες και οδήγησαν στην κεντρική έννοια της σύγχρονης Αναλυτικής Γεωμετρίας:

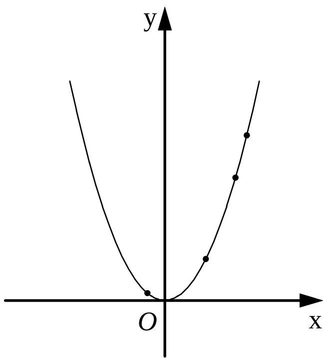
> *"Η εξίσωση μιας καμπύλης, από βοηθητικό μέσο για τη λύση ενός γεωμετρικού προβλήματος, γίνεται μέσο ορισμού και αναπαράστασης αυτής της καμπύλης".*

Ο J. Wallis, στο βιβλίο του "Tractatus de sectionibus conicis" (1655), ορίζει την έλλειψη, την παραβολή και την υπερβολή τόσο με τον κλασικό τρόπο, ως τομές κώνου, όσο και με εξισώσεις 2ου βαθμού, ενώ ο I. Newton το 1676 χρησιμοποιεί με συστηματικό τρόπο δύο άξονες και αρνητικές συντεταγμένες, για να μελετήσει και να ταξινομήσει τις καμπύλες τρίτου βαθμού. Στην εργασία επίσης του Newton "Artis analyticae specimina vel geometria analytica" (που δημοσιεύτηκε το 1779) χρησιμοποιείται για πρώτη φορά ο όρος "Αναλυτική Γεωμετρία". Οι εξελίξεις αυτές, που έλαβαν χώρα παράλληλα με τη δημιουργία του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, διαμόρφωσαν ένα νέο κλάδο των Μαθηματικών. Ο 2ος τόμος του κλασικού έργου του L. Euler "Introductio in analysin infinitorum" (1748) αποτελεί ένα πλήρες διδακτικό εγχειρίδιο Αναλυτικής Γεωμετρίας, στο οποίο οι καμπύλες του επιπέδου και οι επιφάνειες του χώρου ορίζονται και εξετάζονται αποκλειστικά μέσω των εξισώσεών τους ως προς ένα πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

2.1 *ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ*

Εξίσωση Γραμμής

Αν έχουμε μια εξίσωση με δύο αγνώστους, για παράδειγμα την $y = x^2$, τότε **λύση** της εξίσωσης αυτής λέγεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει. Έτσι, για παράδειγμα, τα ζεύγη $(1,1)$ $(2,4)$, $(3,9)$, $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, $(\sqrt{3},3)$ είναι λύσεις της $y = x^2$. Αν τώρα σε ένα σύστημα συντεταγμένων παραστήσουμε με σημεία όλες τις λύσεις της εξίσωσης $y = x^2$, τότε θα προκύψει η γραμμή C, του διπλανού σχήματος που, όπως γνωρίζουμε από προηγούμενες τάξεις λέγεται παραβολή.



Επειδή οι συντεταγμένες (x, y) των σημείων $M(x, y)$ της παραβολής C, και μόνο αυτές, επαληθεύουν την εξίσωση $y = x^2$, γι'αυτό η εξίσωση $y = x^2$ λέγεται εξίσωση της παραβολής C. Γενικά:

Μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y λέγεται εξίσωση μιας γραμμής C, όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C, και μόνο αυτές, την επαληθεύουν.

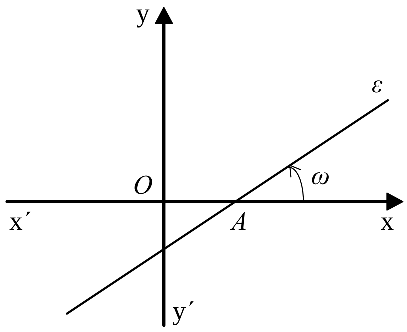
Στη συνέχεια, αντί να λέμε, για παράδειγμα, "δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y = x^2$", θα λέμε "δίνεται η παραβολή $C : y = x^2$" ή απλώς "δίνεται η παραβολή $y = x^2$"

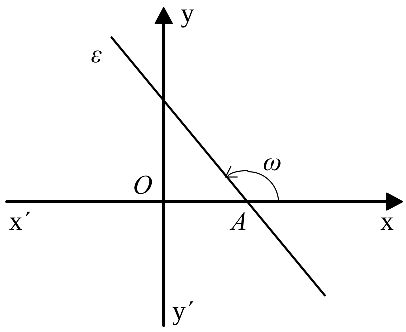
Με τις εξισώσεις των γραμμών μπορούμε με αλγεβρικές μεθόδους να μελετήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες των γραμμών αυτών ή να αντιμετωπίσουμε διάφορα άλλα συναφή προβλήματα. Αυτό είναι και το βασικό αντικείμενο της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

Η ευθεία γραμμή είναι η απλούστερη και η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη γραμμή. Στην αναζήτηση της εξίσωσης μιας ευθείας θα μας διευκολύνει η έννοια του συντελεστή διεύθυνσης ευθείας.

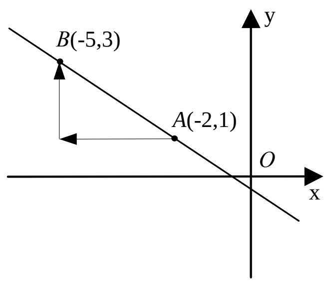
- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $\boldsymbol{x'x}$ στο σημείο A.





Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $\boldsymbol{x'x}$ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη *θετική φορά* μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε τη λέμε ***γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$***. Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία $\boldsymbol{\omega = 0}$. Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $\boldsymbol{0^0 \leq \omega < 180^0}$ ή σε ακτίνια $\boldsymbol{0 \leq \omega < \pi}$. Ως **συντελεστή διεύθυνσης** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$. Προφανώς ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι θετικός, αν η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία και αρνητικός, αν είναι αμβλεία. Αν η ευθεία σχηματίζει με τον $x'x$ μηδενική γωνία, δηλαδή είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με μηδέν.

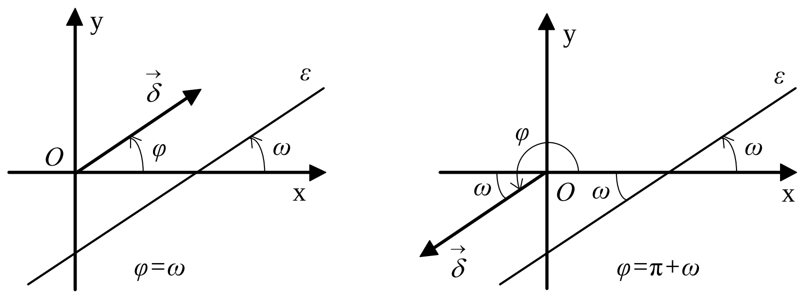
Στην περίπτωση που η γωνία της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι 90^0, δηλαδή η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ευθεία αυτή.



Όταν είναι γνωστά ένα σημείο μιας ευθείας και ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας, τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε την ευθεία. Για παράδειγμα, για να σχεδιάσουμε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(-2,1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{2}{3}$, αρκεί από το A να κινηθούμε 3 μονάδες προς τα αριστερά και στη συνέχεια 2 μονάδες προς τα πάνω. Προσδιορίζουμε έτσι το σημείο $B(-5,3)$, οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι η AB.

- Έστω τώρα ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλο σε μια ευθεία ε. Αν φ και ω είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το $\vec{\delta}$ και η ε με τον $x'x$ αντιστοίχως, τότε θα ισχύει $\varphi = \omega$ ή $\varphi = \pi + \omega$ και επομένως $\varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi\omega$. Άρα:

"Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης".



Αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες δύο σημείων μιας μη κατακόρυφης ευθείας ε, δηλαδή μιας ευθείας που δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, τότε μπορούμε να βρούμε και το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας αυτής. Πράγματι, αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία της ευθείας ε, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, δηλαδή ίσος με $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Επομένως:

> Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι
>
> $$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Για παράδειγμα, ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1,-2)$ και $B(-1,4)$ είναι $\lambda = \dfrac{4-(-2)}{-1-1} = -3$.

Συνθήκες Καθετότητας και Παραλληλίας Ευθειών

Με τη βοήθεια του συντελεστή διεύθυνσης ευθείας, μπορούμε να διατυπώσουμε τις συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών στο επίπεδο. Πράγματι, αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι δύο ευθείες με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 και τα διανύσματα $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ είναι παράλληλα προς τις ε_1 και ε_2 αντιστοίχως, έχουμε τις ισοδυναμίες[1]

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 // \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

και

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1 \perp \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1 .$$

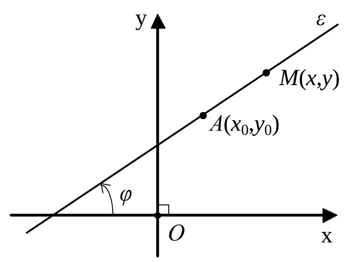
Επομένως, αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως, τότε:

$$\boxed{\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2} \quad \text{και} \quad \boxed{\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1}$$

Εξίσωση Ευθείας

Μια ευθεία στο επίπεδο καθορίζεται, όταν δίνονται ένα σημείο της και ο συντελεστής διεύθυνσής της ή δύο σημεία της. Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας σε καθεμιά από τις δύο αυτές περιπτώσεις.

- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_0, y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου. Ζητάμε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.



Ένα σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι παράλληλο στην ε, δηλαδή αν και μόνο αν το $\overrightarrow{AM}$ και η ε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Επειδή $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$, έχουμε $\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.

Επομένως, το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην ε αν και μόνο αν $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda$ ή $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$. Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο $A(x_0, y_0)$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι:

---

[1] Με το συμβολισμό $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ εννοούμε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν.

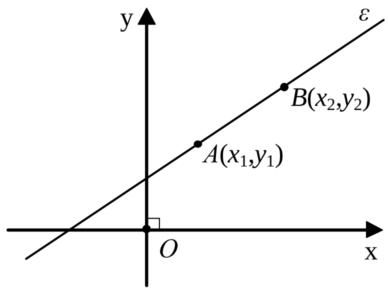
$$\boxed{y - y_0 = \lambda(x - x_0)} \qquad (1)$$

Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$ έχει εξίσωση $y - 2 = -3(x+1)$, δηλαδή $y = -3x - 1$.

- Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

Αν $x_1 \neq x_2$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ και επομένως η εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ γίνεται:

$$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \qquad (2)$$



Οι εξισώσεις (1) και (2) δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν, όταν η ευθεία ε είναι κατακόρυφη, αφού στην περίπτωση αυτή δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Όμως η εξίσωση μιας κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ μπορεί να βρεθεί αμέσως, αφού κάθε σημείο της M έχει τετμημένη x_0 και άρα η εξίσωσή της είναι:

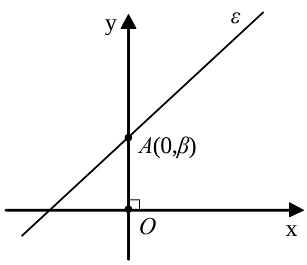
$$\boxed{x = x_0}$$

Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-3,5)$ και $B(4,1)$ έχει εξίσωση $y - 5 = \dfrac{1-5}{4+3}(x+3)$, η οποία μετά τις πράξεις γίνεται $y = -\dfrac{4}{7}x + \dfrac{23}{7}$ και η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(-3,5)$ έχει εξίσωση $x = -3$.

Ειδικές περιπτώσεις

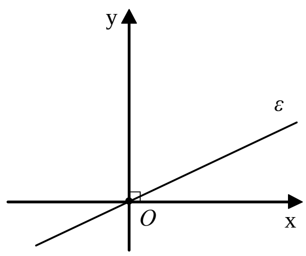
- Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - \beta = \lambda(x - 0)$, η οποία τελικά γράφεται

$$\boldsymbol{y = \lambda x + \beta}.$$

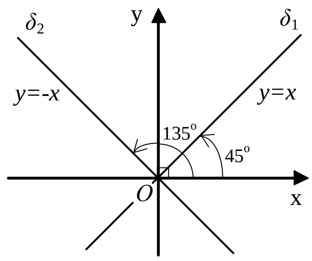


- Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε η εξίσωσή της είναι $y-0=\lambda(x-0)$ ή

$$\boldsymbol{y=\lambda x}\ .$$

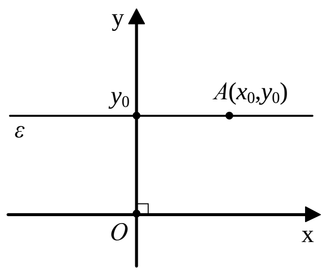


Έτσι, οι διχοτόμοι των γωνιών $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}x'$ έχουν εξισώσεις $y=x$ και $y=-x$ αντιστοίχως.



- Τέλος, αν μια ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, δηλαδή είναι όπως λέμε μια οριζόντια ευθεία, έχει εξίσωση $y-y_0=0(x-x_0)$, δηλαδή

$$\boldsymbol{y=y_0}\ .$$



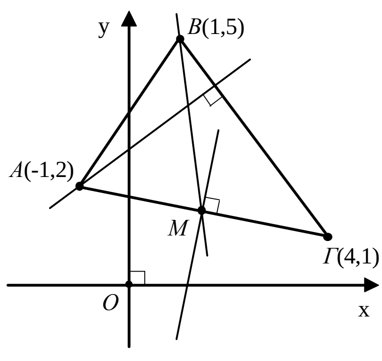
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(-1,2)$, $B(1,5)$ και $\Gamma(4,1)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις:

i) Του ύψους που άγεται από την κορυφή A

ii) Της διαμέσου που άγεται από την κορυφή B

iii) Της μεσοκαθέτου της πλευράς $A\Gamma$.



ΛΥΣΗ

(i) Επειδή $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{5-1}{1-4}=\dfrac{4}{-3}=-\dfrac{4}{3}$, ο συντελεστής διεύθυνσης του ύψους του τριγώνου από το A είναι $\lambda=\frac{3}{4}$. Επομένως, η εξίσωση του ύψους είναι $y-2=\frac{3}{4}(x+1)$ ή $y=\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}$.

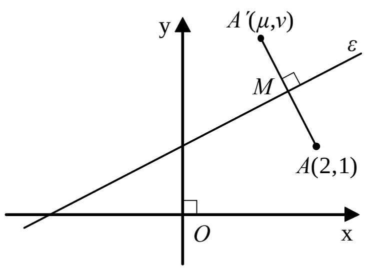
(ii) Το μέσον M του τμήματος $A\Gamma$ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{-1+4}{2},\frac{2+1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Επομένως, ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέσου BM είναι $\lambda=\dfrac{\frac{3}{2}-5}{\frac{3}{2}-1}=-7$ και άρα η εξίσωση της BM είναι $y-5=-7(x-1)$, η οποία γράφεται ισοδύναμα $y=-7x+12$.

(iii) Επειδή η ευθεία $A\Gamma$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{2-1}{-1-4}=-\frac{1}{5}$, η οποιαδήποτε κάθετος σε αυτήν έχει συντελεστή διεύθυνσης 5, επομένως η εξίσωση της μεσοκαθέτου είναι $y-\frac{3}{2}=5\left(x-\frac{3}{2}\right)$ ή ισοδύναμα $y=5x-6$.

2. Δίνονται η ευθεία ε με εξίσωση $y=\frac{1}{2}x+1$ και το σημείο $A(2,1)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου A ως προς την ευθεία ε.

ΛΥΣΗ



Αν $A'(\mu,\nu)$ είναι το συμμετρικό του A ως προς την ε, τότε το μέσον M του AA' ανήκει στην ε και το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των ε και AA' είναι -1, αφού $\varepsilon\perp AA'$. Οι συντεταγμένες του μέσου M είναι $\left(\frac{\mu+2}{2},\frac{\nu+1}{2}\right)$ και ο συντελεστής διεύθυνσης του AA' είναι $\frac{\nu-1}{\mu-2}$. Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases}\frac{\nu+1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu+2}{2}+1\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\nu-1}{\mu-2}=-1\end{cases}$$

, το οποίο μετά την εκτέλεση των πράξεων γράφεται

$$\begin{cases}\mu-2\nu=-4\\ 2\mu+\nu=5\end{cases}.$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού βρίσκουμε $\mu=\dfrac{6}{5}$ και $\nu=\dfrac{13}{5}$. Επομένως, το συμμετρικό σημείο του A ως προς την ε είναι το $A'\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{13}{5}\right)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης:

(i) Της ευθείας, η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(-1,4)$ και $B(1,6)$

(ii) Της ευθείας, η οποία τέμνει τους άξονες στα σημεία $\Gamma(-1,0)$ και $\Delta(0,2)$

(iii) Της ευθείας, η οποία διέρχεται από το O και είναι κάθετη στην $\Gamma\Delta$.

2. Να βρείτε τη γωνία, που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία:

(i) $A(-1,4)$ και $B(1,6)$ (ii) $A(-1,3)$ και $B(0,4)$

(iii) $A(1,3)$ και $B(1,-1)$ (iv) $A(2,3)$ και $B(-2,3)$.

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$ και

(i) Είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}=(3,-2)$

(ii) Είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}=(0,1)$

(iii) Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega=\pi/4$.

4. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-1,0)$, $B(3,2)$ και $\Gamma(-3,4)$. Να βρείτε:

(i) Τις εξισώσεις των υψών του

(ii) Τις εξισώσεις των μεσοκαθέτων των πλευρών του.

5. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(3,1)$, $B(5,5)$, $\Gamma(1,3)$ και $\Delta(-1,-1)$ είναι ρόμβος. Ποιες είναι οι εξισώσεις των διαγωνίων του;

6. Να δείξετε ότι τα σημεία $A(1,-1)$, $B(2,0)$ και $\Gamma(-1,-3)$ είναι συνευθειακά.

7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha\,\text{συν}\theta,\alpha\,\text{ημ}\theta)$ και $B(-\alpha\,\text{ημ}\theta,\alpha\,\text{συν}\theta)$.

8. Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$, $B(-4,5)$ και $\Gamma(3,-4)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την κορυφή A και το κέντρο βάρους G του τριγώνου $AB\Gamma$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, που διέρχονται από το σημείο $A(-1,2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

2. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών και τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$, του οποίου τα δύο ύψη έχουν εξισώσεις $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ και $y=-x+2$ αντιστοίχως και η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(1,4)$.

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(2,1)$ και τέμνει τις ευθείες $y=x+1$ και $y=-x+1$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, έτσι ώστε το M να είναι μέσο του AB.

4. Δίνονται τα σημεία $P(\kappa,1/\kappa)$ και $Q(\lambda,1/\lambda)$.

(i) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας PQ.

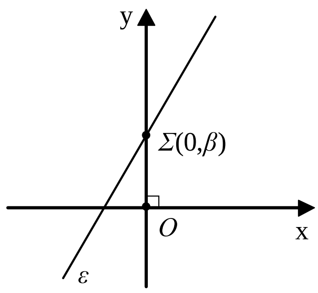
(ii) Αν η ευθεία PQ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, να δείξετε ότι $AP=BQ$.

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$, είναι η $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$.

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$ και τέμνει τους άξονες $x'x$ και yy' στα σημεία A και B, ώστε το άθροισμα της τετμημένης του A και της τεταγμένης του B να είναι ίσο με 15.

2.2 *ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ*

Η Εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$, *με* $A\neq 0$ *ή* $B\neq 0$

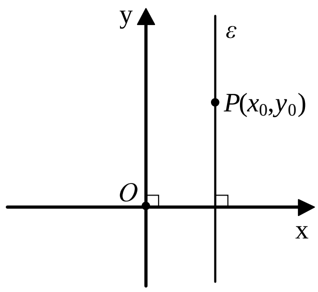


- Έστω ε μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.

— Αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $\Sigma(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε θα έχει εξίσωση $y=\lambda x+\beta$, η οποία γράφεται $\lambda x+(-1)y+\beta=0$

- Αν η ευθεία ε είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$, τότε θα έχει εξίσωση $x = x_0$, η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$x + 0 \cdot y + (-x_0) = 0 .$$



Βλέπουμε, δηλαδή, ότι και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας ε παίρνει τη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

- Αντιστρόφως, έστω η εξίσωση

$Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

— Αν $B \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$, που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$ και η οποία τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$.

— Αν $B = 0$, τότε, λόγω της υπόθεσης, είναι $A \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται $x = -\frac{\Gamma}{A}$, που είναι εξίσωση ευθείας κάθετης στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $P\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$.

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία. Αποδείξαμε, δηλαδή, ότι ισχύει το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \quad A \neq 0 \quad \text{ή} \quad B \neq 0 \qquad (1)$$

και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x + y - 6 = 0$ παριστάνει ευθεία. Η εξίσωση αυτή γράφεται στη μορφή $y = -2x + 6$ και βλέπουμε ότι έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -2$ και τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $(0,6)$.

Διάνυσμα Παράλληλο ή Κάθετο σε Ευθεία

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία του επιπέδου με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$. Είδαμε προηγουμένως ότι:

— Αν $B \neq 0$, τότε η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$ και επομένως είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

— Αν $B = 0$, τότε η ε είναι παράλληλη προς τον άξονα yy' και επομένως παράλληλη και πάλι προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει ότι:

Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

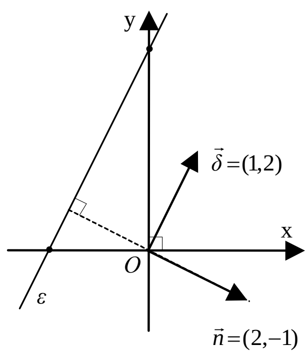
Όμως, το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$, αφού

$$\vec{\delta} \cdot \vec{n} = (B, -A) \cdot (A, B) = AB - AB = 0 .$$

Επομένως:

Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$.

Για παράδειγμα, η ευθεία $2x - y + 4 = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-1, -2)$ και κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (2, -1)$.



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται η εξίσωση:

$$(x - 2y + 5) + \lambda(3x + 2y + 7) = 0 \quad \textbf{(1)}, \qquad \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

(i) Να αποδειχτεί ότι

—Για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή

—Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) (Οικογένεια ευθειών) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(ii) Ποια από τις παραπάνω ευθείες είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta : y = 2x$;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα

$$(1 + 3\lambda)x + (-2 + 2\lambda)y + (5 + 7\lambda) = 0 . \qquad (2)$$

Επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζονται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$.
Για να δείξουμε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο, αρκεί να βρούμε ένα σημείο $K(x_0, y_0)$ του οποίου οι συντεταγμένες να επαληθεύουν την (1) για όλες τις τιμές του λ. Το ζητούμενο σημείο θα είναι εκείνο του οποίου οι συντεταγμένες μηδενίζουν τις παραστάσεις $x-2y+5$ και $3x+2y+7$, δηλαδή η λύση του συστήματος

$$x-2y+5=0 \quad \text{και} \quad 3x+2y+7=0 .$$

Από την επίλυση του συστήματος βρίσκουμε ότι $x_0=-3$ και $y_0=1$. Επομένως, όλες οι ευθείες της οικογένειας (1) διέρχονται από το σημείο $K(-3,1)$.

(ii) Έστω ε ευθεία της οικογένειας (1) που είναι κάθετη στην ευθεία ζ. Τότε θα ισχύει

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{1}{2} \qquad (3)$$

όμως, λόγω της (2), ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι ίσος με

$$\lambda_\varepsilon = \frac{1+3\lambda}{2-2\lambda} .$$

Επομένως, από την (3) έχουμε

$$\frac{1+3\lambda}{2-2\lambda} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2+6\lambda = -2+2\lambda \Leftrightarrow \lambda = -1 ,$$

οπότε η ευθεία ε θα έχει εξίσωση $-2x-4y-2=0$ που γράφεται

$$x+2y+1=0 .$$

2. Δίνεται τρίγωνο *ΑΒΓ* με κορυφές *Α*(2,3), *Β*(4,1) και *Γ*(5*λ*-1,*λ*), *λ*∈R. Να αποδείξετε ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου κινείται σε μια ευθεία, καθώς το *λ* μεταβάλλεται στο R.

ΛΥΣΗ

Αν $G(x, y)$ το κέντρο βάρους του τριγώνου, τότε $x = \frac{2+4+5\lambda-1}{3} = \frac{5\lambda+5}{3}$ και $y = \frac{3+1+\lambda}{3} = \frac{\lambda+4}{3}$. Έχουμε λοιπόν το σύστημα $\begin{cases} x = \frac{5\lambda+5}{3} \\ y = \frac{\lambda+4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 5\lambda+5 \\ 3y = \lambda+4 \end{cases}$.

Απαλείφουμε το λ από τις εξισώσεις και βρίσκουμε $3x-15y+15=0$ ή ισοδύναμα $x-5y+5=0$. Άρα, το κέντρο βάρους του τριγώνου $ΑΒΓ$ κινείται στην ευθεία $\chi-5y+5=0$.

3. **Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1 \ : \ x-y+1=0$ και $\varepsilon_2 \ : \ 2x+y-3=0$.**

ΛΥΣΗ

Οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-2$. Άρα, είναι παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta}_1=(1,1)$ και $\vec{\delta}_2=(1,-2)$. Επομένως, η οξεία γωνία θ των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας φ των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$. Όμως, είναι:

$$\text{συν}\varphi=\frac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\cdot|\vec{\delta}_2|}=\frac{1\cdot1+1(-2)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{-1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Επομένως, $\text{συν}\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$, οπότε $\theta\cong72^0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του μ η εξίσωση $(\mu-1)x+\mu y+\mu^2=0$ παριστάνει ευθεία γραμμή. Πότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, πότε προς τον $y'y$ και πότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x-3y+6=0$. Ποιο είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών;

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $2x-5y+3=0$ και $x-3y-7=0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4x+y=1$.

4. Τα σημεία $A(-4,6)$ και $\Gamma(-1,1)$ είναι οι απέναντι κορυφές ενός παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$. Οι πλευρές $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ του παραλληλόγραμμου ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $x+3y=2$ και $x-y+2=0$ αντιστοίχως. Να υπολογίσετε:

(i) Τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

(ii) Το συνημίτονο της οξείας γωνίας των διαγωνίων του παραλληλόγραμμου.

5. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbf{R}$, ώστε οι ευθείες $(\lambda-1)x+\lambda y+8=0$ και

$\lambda x+3y+1-2\lambda=0$ να είναι κάθετες.

6. Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\mathbf{R}$, ώστε η ευθεία $3x+3y+\kappa=0$ να διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $3x+4y+6=0$ και $6x+5y-9=0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να σχεδιάσετε τις γραμμές τις οποίες παριστάνουν οι εξισώσεις:
(i) $x^2-y^2+4y-4=0$ (ii) $x^2-y^2-4x+2y+3=0$.

2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της μορφής
$$(2\alpha^2+\alpha+3)x+(\alpha^2-\alpha+1)y+(3\alpha+1)=0,\ \alpha\in\mathbf{R}$$
διέρχονται από το ίδιο σημείο.

3. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $x+4y=5$, $3x-2y=1$ και $7x-8y+1=0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

4. Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι ευθείες $y=\mu x$ και $(1+\mu)x=(1-\mu)y$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο τομής των ευθειών $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ και $\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1$.

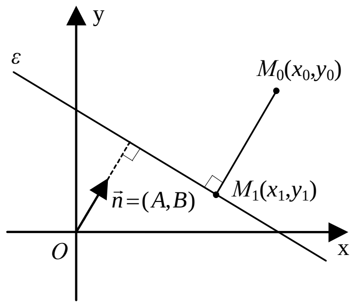
6. Δίνεται η ευθεία $3x+y=3$ και το σημείο $A(1,2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της προβολής του A στην ευθεία αυτή.

7. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon:\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία είναι κάθετη στην ε στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

2.3 *ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ*

Απόσταση Σημείου από Ευθεία

Έστω ε μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου, με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ και $M_0(x_0,y_0)$ ένα σημείο εκτός αυτής. Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση



$d(M_0,\varepsilon)$ του σημείου M_0 από την ευθεία ε. Αν $M_1(x_1,y_1)$ είναι η προβολή του M_0 πάνω στην ε, τότε θα ισχύει

$$d(M_0,\varepsilon)=|\overrightarrow{M_0M_1}| \qquad (1)$$

Όμως το διάνυσμα $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$ είναι παράλληλο προς το $\vec{n}=(A,B)$, αφού και τα δύο είναι κάθετα στην ευθεία ε. Άρα, θα υπάρχει $\lambda\in\mathbf{R}$, τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{M_0M_1}=\lambda\vec{n} \qquad (2)$$

οπότε, λόγω της (1), θα ισχύει

$$d(M_0,\varepsilon)=|\lambda\vec{n}|=|\lambda|\cdot|\vec{n}|=|\lambda|\cdot\sqrt{A^2+B^2} \qquad (3)$$

Επιπλέον, λόγω της (2), έχουμε $(x_1-x_0,y_1-y_0)=\lambda(A,B)$, οπότε

$$x_1=x_0+\lambda A \quad \text{και} \quad y_1=y_0+\lambda B \qquad (4)$$

Όμως το $M_1(x_1,y_1)$ ανήκει στην ε. Άρα, θα ισχύει

$$\begin{aligned} Ax_1+By_1+\Gamma=0 &\overset{(4)}{\Leftrightarrow} A(x_0+\lambda A)+B(y_0+\lambda B)+\Gamma=0 \\ &\Leftrightarrow (A^2+B^2)\lambda+(Ax_0+By_0+\Gamma)=0 \\ &\Leftrightarrow \lambda=-\frac{Ax_0+By_0+\Gamma}{A^2+B^2}. \end{aligned}$$

Επομένως, λόγω της (3), θα έχουμε

$$d(M_0,\varepsilon)=\left|-\frac{Ax_0+By_0+\Gamma}{A^2+B^2}\right|\cdot\sqrt{A^2+B^2}=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

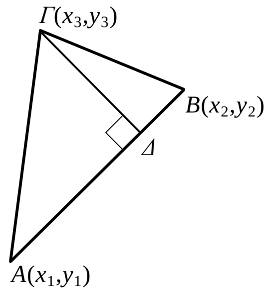
Αποδείξαμε δηλαδή ότι:

$$\boxed{d(M_0,\varepsilon)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Για παράδειγμα, η απόσταση του σημείου $M_0(-1,2)$ από την ευθεία $\varepsilon: 4x+3y+8=0$ είναι ίση με

$$d(M_0,\varepsilon)=\frac{|4(-1)+3\cdot 2+8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2.$$

Υπολογισμός Εμβαδού



Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου. Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου *ΑΒΓ*.

Αν *ΓΔ* είναι το ύψος του *ΑΒΓ* από την κορυφή *Γ*, τότε θα ισχύει

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)\cdot(\Gamma\Delta)\,. \qquad (1)$$

Το (*ΑΒ*) είναι η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Επομένως,

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (2)$$

Το (*ΓΔ*) είναι η απόσταση του σημείου *Γ* από την ευθεία *ΑΒ*. Για να την υπολογίσουμε, θα βρούμε πρώτα την εξίσωση της *ΑΒ*.

Η *ΑΒ*, αν δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$, θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, οπότε θα έχει εξίσωση

$$AB: \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,,$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$AB: \quad (x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0\,. \qquad (3)$$

Αν, όμως, η *ΑΒ* είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$, τότε θα έχει εξίσωση $x = x_1$, η οποία παίρνει και αυτή τη μορφή (3).

Η εξίσωση (3), μετά την εκτέλεση των πράξεων, γράφεται

$$AB: \quad (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0\,. \qquad (4)$$

Επομένως, η απόσταση (*ΓΔ*) του *Γ* από την ευθεία *ΑΒ* είναι ίση με

$$(\Gamma\Delta) \overset{(4)}{=} \frac{|(y_1 - y_2)x_3 + (x_2 - x_1)y_3 + (x_1y_2 - x_2y_1)|}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2}}$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)|}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\,.$$

Άρα,

$$(\Gamma\Delta)=\frac{\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}}. \quad (5)$$

Έτσι, η ισότητα (1), λόγω του (2) και (5), γράφεται

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|. \quad (6)$$

Όμως, η 1η γραμμή της ορίζουσας είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και η 2η γραμμή οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$. Επομένως, η ορίζουσα αυτή είναι ίση με την ορίζουσα $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})$ των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Έτσι, η σχέση (6) γράφεται

$$\boxed{(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})|}$$

Για παράδειγμα, αν $A(0,1), B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-8)$ είναι οι κορυφές ενός τριγώνου $AB\Gamma$, τότε $\overrightarrow{AB}=(-1,-1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-9)$, οπότε το εμβαδόν του $AB\Gamma$ είναι

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -9 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot 12=6.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι η απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1 : y=\lambda x+\beta_1$ και $\varepsilon_2 : y=\lambda x+\beta_2$ δίνεται από τον τύπο

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\frac{|\beta_1-\beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η απόσταση των ε_1 και ε_2 είναι ίση με την απόσταση οποιουδήποτε σημείου της ευθείας ε_1 από την ευθεία ε_2.

Για $x=0$, από την πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $y=\beta_1$. Άρα, το σημείο $A(0,\beta_1)$

ανήκει στην ε_1, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} d(\varepsilon_1,\varepsilon_2) &= d(A,\varepsilon_2) \\ &= \frac{|\lambda\cdot 0-\beta_1+\beta_2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}, \quad \text{αφού} \quad \varepsilon_2 : \lambda x - y+\beta_2=0 \\ &= \frac{|\beta_1-\beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{aligned}$$

2. Θεωρούμε τα σημεία *Α*(-3,0), *Β*(-2,0) και *Γ*(-4,2). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων *Μ*(*x*,*y*) για τα οποία ισχύει: (*ΜΒΓ*)=2(*ΑΒΓ*)

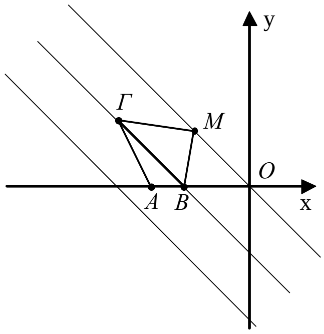
ΛΥΣΗ

Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right|=1,$$

ενώ του ($MB\Gamma$) είναι ίσο με

$$(MB\Gamma)=\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{BM})|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ x+2 & y \end{vmatrix}\right|=|x+y+2|$$



Επομένως, το $M(x,y)$ είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου, αν και μόνο αν ισχύει

$$\begin{aligned} |x+y+2|=2 &\Leftrightarrow x+y+2=2 \quad \text{ή} \quad x+y+2=-2 \\ &\Leftrightarrow y=-x \quad\quad\quad \text{ή} \quad y=-x-4. \end{aligned}$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος αποτελείται από τις ευθείες

$$y=-x \quad \text{και} \quad y=-x-4,$$

οι οποίες είναι παράλληλες προς τη *ΒΓ*.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $A(-2,3)$ από την ευθεία

(i) $x+y+1=0$ (ii) $y=2x-3$

(iii) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ (iv) $5x+3y+1=0$

2. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 5x-8y-51=0$ και $\varepsilon_2: 5x-8y+68=0$.
(i) Να δείξετε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$
(ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις της αρχής των αξόνων από τις ε_1 και ε_2
(iii) Να υπολογίσετε την απόσταση των ε_1 και ε_2.

3. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 4x-3y-9=0$ και $\varepsilon_2: 4x-3y-24=0$.
(i) Να δείξετε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$
(ii) Να βρείτε ένα σημείο της ε_1 και στη συνέχεια να υπολογίσετε την απόσταση των ε_1 και ε_2.

4. Ποιο σημείο της ευθείας $2x-3y=30$ ισαπέχει από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(7,9)$;

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-3$ και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 5 μονάδες.

6. Η ευθεία $\varepsilon: 3x-2y+1=0$ είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2, που απέχουν 8 μονάδες. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών αυτών.

7. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές:
(i) $A(0,0)$, $B(6,0)$, $\Gamma(4,3)$ (ii) $A(-2,4)$, $B(2,-6)$, $\Gamma(5,4)$
(iii) $A(1,2)$, $B(3,4)$, $\Gamma(-5,-4)$.

8. Δίνονται τα σημεία $A(5,1)$ και $B(1,3)$. Να βρείτε το σημείο M του άξονα $x'x$, για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου MAB είναι ίσο με 7.

9. Δίνονται τα σημεία $A(3,4)$ και $B(5,-2)$. Να βρείτε το σημείο M, τέτοιο, ώστε $MA=MB$ και $(MAB)=10$.

10. Ενός παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$ οι τρεις κορυφές του έχουν συντεταγμένες $(-3,1)$, $(-2,3)$ και $(4,-5)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισαπέχει από τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(0,2)$.

2. Να βρείτε το σημείο του άξονα $x'x$, το οποίο ισαπέχει από την αρχή των αξόνων O και από την ευθεία $5x+12y-60=0$.

3. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M(1,2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $E=4$.

4. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων O και απέχουν από το σημείο $A(-1,3)$ απόσταση ίση με 1.

5. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $x-y+2=0$, τα οποία απέχουν από την ευθεία $12x-5y+60=0$ απόσταση ίση με 1.

6. Να δείξετε ότι τα σημεία $A(\alpha,\beta)$, $B(\gamma,\delta)$ και $\Gamma(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν $\alpha\delta=\beta\gamma$.

7. Δίνονται τα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$. Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει τους άξονες στα σημεία $P(p,0)$ και $Q(0,q)$, να δείξετε ότι:

(i) $\alpha q+\beta p=2pq$ (ii) $\alpha p+\beta q=0$.

Στη συνέχεια να εκφράσετε τα p και q συναρτήσει των α και β.

8. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $3x-4y+1=0$ και $5x+12y+4=0$.

9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $x-y+1=0$ και $2x-3y+5=0$ και απέχει από το σημείο $A(3,2)$ απόσταση ίση με $\frac{7}{5}$.

10. Δίνονται τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(3,1)$. Να βρείτε το σύνολο των σημείων M για τα οποία ισχύει $(MAB)=8$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο $M(1,0)$ και τέμνει τις ευθείες $y=x+2$ και $y=x$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, έτσι, ώστε $(AB)=2$.

2. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x+(\lambda-1)y=2\lambda$ και $(\lambda+1)x+\lambda y=2\lambda+1$ τέμνονται για όλες τις τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}$. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής τους;

3. Αν οι τρεις ευθείες $\alpha_\kappa x+\beta_\kappa y=1$, με $\kappa=1,2,3$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, να αποδείξετε ότι τα σημεία $(\alpha_\kappa,\beta_\kappa)$, $\kappa=1,2,3$, είναι συγγραμμικά.

4. Να βρείτε την ευθεία η οποία συνδέει το σημείο $A\,(\alpha,\beta)$ με το σημείο τομής των ευθειών $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ και $\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}=1$.

5. Αν οι ευθείες $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ και $\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$ είναι παράλληλες με $A>\alpha$ και $\beta>0$, να δείξετε ότι η απόσταση μεταξύ των ευθειών είναι $\frac{\beta(A-\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

6. Να δείξετε ότι:

(i) Η εξίσωση $x^2-4xy+y^2=0$ παριστάνει δύο ευθείες.

(ii) Καθεμιά σχηματίζει με την $x-y=0$ γωνία 30^0.

7. Να βρείτε συνθήκη, ώστε:

(i) Η ευθεία $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ να ορίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο

(ii) Ο άξονας $x'x$ να διχοτομεί τη γωνία των ευθειών με εξισώσεις $\varepsilon_1: \alpha_1x+\beta_1y=0$ και $\varepsilon_2: \alpha_2x+\beta_2y=0$.

8. Να βρείτε συνθήκη μεταξύ των α,β,γ, έτσι ώστε η ευθεία $\alpha x+\beta y+\gamma=0$

(i) Να τέμνει το θετικό ημιάξονα Ox και τον αρνητικό Oy'

(ii) Να μην έχει κανένα σημείο της στο (Ι) τεταρτημόριο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Σε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς να κυκλώσετε το Α, αν είναι αληθής, και το Ψ, αν είναι ψευδής:

- Η ευθεία $y=-3x+5$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$ Α Ψ
- Οι ευθείες $x=5$ και $y=-2$ είναι κάθετες Α Ψ
- Η εξίσωση $(\alpha+1)x+(\alpha^2-1)y+10=0$, $a\in\mathbf{R}$ παριστάνει πάντοτε ευθεία Α Ψ
- Η ευθεία $3x+4y-1=0$ δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων Α Ψ
- Η εξίσωση $y-2=\lambda(x-3)$, $\lambda\in\mathbf{R}$ παριστάνει για τις διάφορες τιμές του λ όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(3, 2)$. Α Ψ

2. Να αντιστοιχίσετε κάθε σημείο της πρώτης στήλης στην ευθεία της δεύτερης στήλης στην οποία ανήκει:

Σημείο	**Ευθεία**
$A(2,1)$	
$B(2,3)$	$y = 3$
$\Gamma(1,2)$	$x = 2$
$\Delta(0,3)$	$3x - 2y = 0$
$E(0,0)$	$2x - 5y = -8$
$Z(2,8)$	

3. Να κυκλώσετε τη σωστή κάθε φορά απάντηση:

- Οι ευθείες $2x-y-4=0$ και $x-3y+3=0$ τέμνονται στο σημείο:
  $O(0,0)$ $A(2,0)$ $B(0,1)$ $\Gamma(3,2)$ $\Delta(1,1)$
- Αν η ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης , τότε συμπεραίνουμε ότι:
  $\Gamma=0$ $A\neq 0$ $B\neq 0$ $A=0$
- Μια ευθεία κάθετη στην ευθεία ε : y = x είναι η :
  $y=x+5$ y, $y=2$, $x+y=8$, $y=-2x$, $x=-1$.

4. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y=3x+8$. Να γράψετε :

- Δύο ευθείες παράλληλες στην ε
- Δύο ευθείες κάθετες στην ε
- Την ευθεία την παράλληλη στην ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- Την ευθεία την κάθετη στην ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

5. Να κυκλώσετε την ευθεία που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων:

- $\varepsilon_1 : 3x-10y-1=0$
- $\varepsilon_2 : 3x-10y-6=0$
- $\varepsilon_3 : 3x-10y-9=0$
- $\varepsilon_4 : 3x-10y+6=0$.

6. Οι ευθείες $2x+y+2=0$ και $2x-y+2=0$, είναι:

Α. Παράλληλες Β. Κάθετες
Γ. Συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$ Δ. Συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

3 ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Εισαγωγή

Η μελέτη της έλλειψης, της παραβολής και της υπερβολής από τους Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς φαίνεται ότι είχε αφετηρία τη σχέση αυτών των καμπύλων με ορισμένα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών, όπως, για παράδειγμα, το περίφημο πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου:

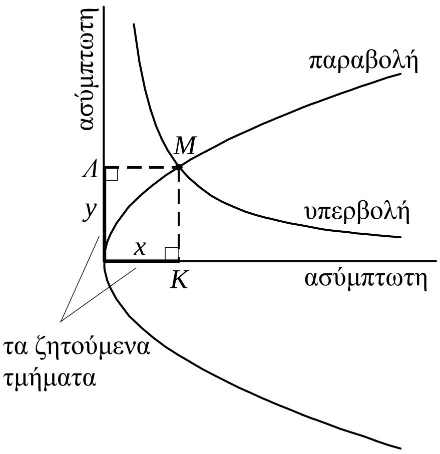
"Δοθέντος ενός κύβου, να κατασκευαστεί ένας άλλος με διπλάσιο όγκο".

Με αλγεβρικό συμβολισμό αυτό σημαίνει ότι αν α είναι η πλευρά του αρχικού κύβου, να κατασκευαστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα x, που θα είναι η πλευρά του κύβου με όγκο $2\alpha^3$, δηλαδή $x^3 = 2\alpha^3$. Ο Πρόκλος (450 περίπου μ.Χ.) αναφέρει ότι ο Ιπποκράτης ο Χίος (430 περίπου π.Χ.) ήταν ο πρώτος που ανήγαγε το πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου στην παρεμβολή δύο μέσων αναλόγων ανάμεσα στο α και το 2α, δηλαδή στην κατασκευή δύο τμημάτων x και y, τέτοιων, ώστε $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2\alpha}$ (1) (από τις αναλογίες αυτές προκύπτει εύκολα ότι $x^3 = 2\alpha^3$, δηλαδή το x θα είναι η πλευρά του ζητούμενου κύβου).

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι το πρόβλημα παρεμβολής μιας μέσης αναλόγου ανάμεσα σε δύο γνωστά τμήματα α, β (δηλαδή η κατασκευή τμήματος x τέτοιου, ώστε $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\beta}$) λύνεται εύκολα με κανόνα και διαβήτη, δηλαδή με τη βοήθεια ευθείας και κύκλου. Δεν ισχύει όμως το ίδιο για την παρεμβολή δύο μέσων αναλόγων η οποία απαιτεί τη χρησιμοποίηση διαφορετικών γεωμετρικών καμπύλων. Επειδή από τις αναλογίες (1) προκύπτει $x^2 = \alpha y$ (2), $y^2 = 2\alpha x$ (3) και $xy = 2\alpha^2$ ή $y = \frac{2\alpha^2}{x}$ (4), συμπεραίνουμε ότι τα μήκη των τμημάτων x και y θα είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής δύο από τις τρεις καμπύλες (2), (3) και (4), που είναι αντιστοίχως δύο παραβολές και μία υπερβολή.

Η φράση "Μεναιχμείους κωνοτομείν τριάδας", που αναφέρεται σε ένα επίγραμμα του Ερατοσθένη του Κυρηναίου (250 περίπου π.Χ.) σχετικό με το διπλασιασμό του κύβου, έχει οδηγήσει στην υπόθεση ότι οι τρεις αυτές καμπύλες ανακαλύφθηκαν από τον Μέναιχμο, εταίρο στην Ακαδημία του Πλάτωνα, γύρω στο 350 π.Χ.

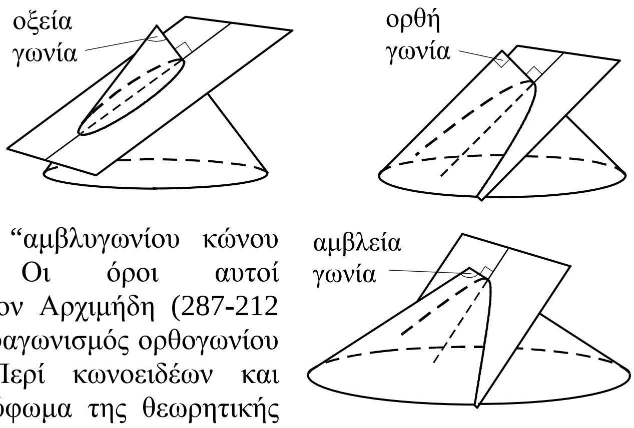
Στη μία από τις δύο λύσεις του Μέναιχμου, που αναφέρει ο Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης (550 περίπου μ.Χ.), οι καμπύλες κατασκευάζονται σύμφωνα με τα γεωμετρικά ισοδύναμα των (3) και (4). Για παράδειγμα, το M, ως σημείο της παραβολής, προσδιορίζεται, έτσι ώστε το τετράγωνο πλευράς MK να είναι ισοδύναμο προς ένα ορθογώνιο με πλευρές 2α και $M\Lambda$ (δηλαδή $y^2 = 2\alpha x$), ενώ ως σημείο της υπερβολής, έτσι ώστε το ορθογώνιο με πλευρές $M\Lambda$ και MK να είναι ισοδύναμο προς ένα ορθογώνιο με πλευρές 2α και α (δηλαδή $xy = 2\alpha^2$).



Τέλος, τα ζητούμενα τμήματα x, y προσδιορίζονται φέρνοντας τις κάθετες από το σημείο τομής των δύο καμπύλων πάνω στις ασύμπτωτες της υπερβολής (η μία από τις οποίες είναι ταυτόχρονα και άξονας συμμετρίας της παραβολής).

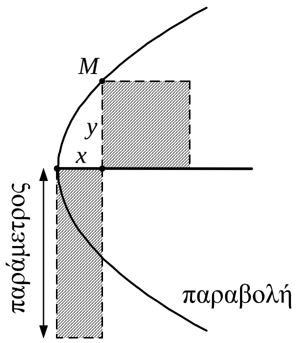
Γύρω στο 300 π.Χ., η υπερβολή, η παραβολή και η έλλειψη είχαν γίνει αντικείμενο συστηματικής μελέτης, ως οι τομές που δημιουργούνται στην επιφάνεια ενός κώνου από ένα επίπεδο κάθετο σε μια γενέτειρά του.

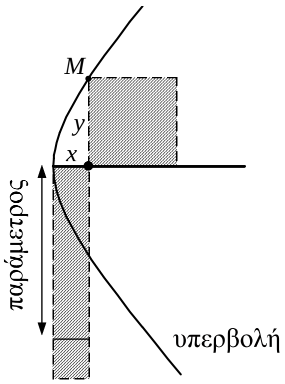
Ανάλογα με τη γωνία της κορυφής του κώνου οι καμπύλες αυτές ορίζονταν ως "οξυγωνίου κώνου τομή" (έλλειψη), "ορθογωνίου κώνου τομή" (παραβολή) και "αμβλυγωνίου κώνου τομή" (υπερβολή). Οι όροι αυτοί χρησιμοποιούνται από τον Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.) στα έργα του "Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής" και "Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων". Αποκορύφωμα της θεωρητικής μελέτης των τριών κωνικών τομών κατά την αρχαιότητα, υπήρξε το περίφημο έργο "Κωνικά" του Απολλώνιου του Περγαίου (250 περίπου π.Χ.), ο οποίος στηρίχτηκε σε προηγούμενα έργα του Αρισταίου και του Ευκλείδη, τα οποία όμως δε διασώθηκαν.

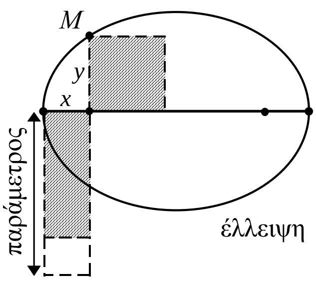


Τα "Κωνικά" ήταν χωρισμένα σε 8 βιβλία, που περιείχαν μια άψογη γεωμετρική θεωρία των κωνικών τομών και ένα μεγάλο πλήθος νέων αποτελεσμάτων. Στα 7 πρώτα βιβλία που έχουν διασωθεί υπάρχουν 387 θεωρήματα ενώ στο 8ο, όπως συνάγεται από μαρτυρία του Πάππου, υπήρχαν άλλα 100. Μια βασική καινοτομία του Απολλώνιου υπήρξε ο ορισμός των τριών καμπύλων διαμέσου τριών διαφορετικών τομών ενός κώνου, καθώς και η εισαγωγή των όρων “παραβολή”, “έλλειψη” και “υπερβολή”.

Τα ονόματα αυτά έχουν άμεση σχέση με το νέο τρόπο ορισμού των κωνικών τομών από τον Απολλώνιο, σύμφωνα με τον οποίο, σε κάθε τομή του κώνου από το επίπεδο αντιστοιχεί ένα σταθερό μήκος (παράμετρος), το οποίο εξαρτάται από το είδος του κώνου και από τη θέση του επιπέδου. Ο Απολλώνιος έδειξε ότι για κάθε καμπύλη τα δύο γραμμοσκιασμένα εμβαδά σε καθένα από τα διπλανά σχήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Το ένα από αυτά είναι το τετράγωνο με πλευρά την κάθετη y από σημείο της καμπύλης προς τον άξονα συμμετρίας της˙ το άλλο είναι ένα ορθογώνιο με μια πλευρά την απόσταση x του ίχνους αυτής της κάθετης από την κορυφή της καμπύλης. Η σχέση της άλλης πλευράς του ορθογωνίου προς τη σταθερή παράμετρο της τομής είναι αυτή που καθορίζει τη μορφή και το όνομα της καμπύλης. Αν η άλλη πλευρά ισούται (“παραβάλλεται”) προς την παράμετρο, τότε η καμπύλη είναι παραβολή. Αν η άλλη πλευρά είναι μικρότερη (“ελλείπει”) από την παράμετρο, η καμπύλη είναι έλλειψη, ενώ αν είναι μεγαλύτερη (“υπερβάλλει”), η καμπύλη είναι υπερβολή.







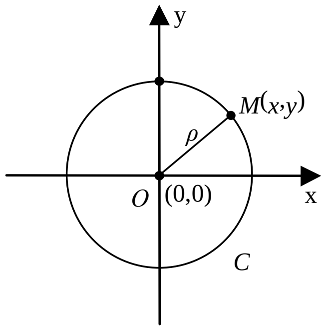
3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ

Εξίσωση Κύκλου

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ. Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του O απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει:

$$(OM) = \rho \qquad (1)$$

Όμως, $(OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Επομένως, η (1) γράφεται



$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \quad \text{ή, ισοδύναμα,}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2. \qquad (2)$$

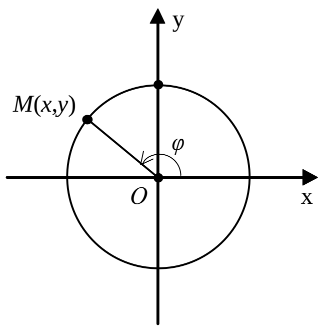
Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου και μόνο αυτές επαληθεύουν την εξίσωση (2). Άρα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2} \qquad (3)$$

Για παράδειγμα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Ο κύκλος αυτός λέγεται **μοναδιαίος κύκλος**.

Παραμετρικές Εξισώσεις Κύκλου

Έστω ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ και ένα σημείο $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου.



Αν το $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο C και $\varphi \in [0, 2\pi)$ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ με τον άξονα $x'x$, τότε, όπως γνωρίζουμε από την Τριγωνομετρία, θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$x = \rho\text{συν}\varphi \quad \text{και} \quad y = \rho\text{ημ}\varphi. \qquad (1)$$

Αντιστρόφως, αν για τις συντεταγμένες x, y του M ισχύουν οι σχέσεις (1), τότε το σημείο M θα ανήκει στον κύκλο C, αφού

$$x^2 + y^2 = \rho^2\text{συν}^2\varphi + \rho^2\text{ημ}^2\varphi = \rho^2(\text{συν}^2\varphi + \text{ημ}^2\varphi) = \rho^2.$$

Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων $M(x, y)$ του κύκλου C και μόνον αυτές ικανοποιούν τις εξισώσεις

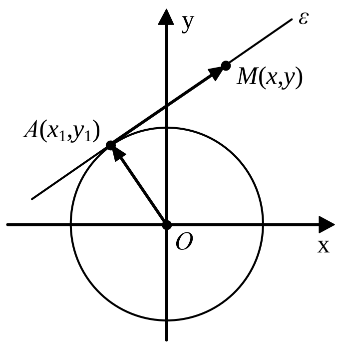
$$\boxed{x = \rho\text{συν}\varphi \quad \text{και} \quad y = \rho\text{ημ}\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi)}$$

Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις** του κύκλου C.

Εφαπτομένη Κύκλου

Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$. Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν $OA \perp AM$, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AM}=0. \quad (1)$$



Όμως $\overrightarrow{OA}=(x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{AM}=(x-x_1, y-y_1)$. Έτσι η (1) γράφεται διαδοχικά

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$$

$$xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$$

$$xx_1+yy_1=\rho^2, \qquad \text{αφού} \quad x_1^2+y_1^2=\rho^2.$$

Επομένως, η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

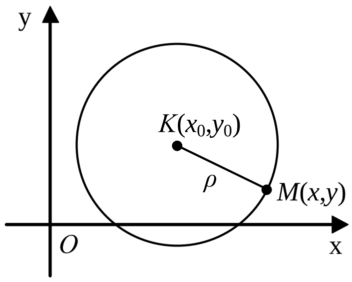
$$\boxed{xx_1+yy_1=\rho^2}$$

Για παράδειγμα, η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=1$ στο σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ έχει εξίσωση $x\frac{1}{2}+y\frac{\sqrt{3}}{2}=1$, η οποία γράφεται $x+\sqrt{3}y-2=0$.

Η Εξίσωση $\boldsymbol{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0}$

- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του K απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$(KM)=\rho \quad (1)$$



Όμως, $(KM)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2.$$

Άρα, ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2} \tag{2}$$

Έτσι, για παράδειγμα, ο κύκλος με κέντρο $K(1,-3)$ και ακτίνα $\rho=2$ έχει εξίσωση $(x-1)^2+(y+3)^2=\rho^2$.

- Αν τώρα εκτελέσουμε τις πράξεις, η εξίσωση (2) γράφεται

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-\rho^2)=0,$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0, \tag{3}$$

όπου $A=-2x_0$, $B=-2y_0$ και $\Gamma=x_0^2+y_0^2-\rho^2$.
Αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (3) γράφεται διαδοχικά:

$$(x^2+Ax)+(y^2+By)=-\Gamma$$

$$\left(x^2+2\frac{A}{2}x+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+2\frac{B}{2}y+\frac{B^2}{4}\right)=-\Gamma+\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}.$$

Επομένως:

— Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η εξίσωση (3) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

— Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$, η εξίσωση (3) παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.

— Αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$, η εξίσωση (3) είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x,y)$ των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ (I) και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (I) παριστάνει κύκλο.

Η εξίσωση $x^2+y^2-4x+6y+12=0$, για παράδειγμα, γράφεται διαδοχικά

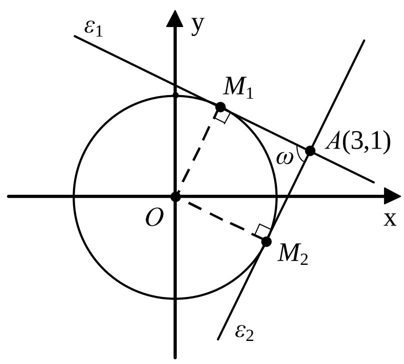
$$(x^2-4x)+(y^2+6y)=-12$$
$$(x^2-2\cdot 2x+2^2)+(y^2+2\cdot 3y+3^2)=-12+2^2+3^2$$
$$(x-2)^2+(y+3)^2=1^2.$$

Άρα, παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C: x^2+y^2=5$ που διέρχονται από το σημείο $A(3,1)$, και να αποδειχτεί ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

ΛΥΣΗ



Έστω ε_1 μια εφαπτομένη του κύκλου C που διέρχεται από το σημείο A. Αν $M_1(x_1,y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η ε_1 θα έχει εξίσωση

$$xx_1+yy_1=5 \qquad (1)$$

και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$, θα ισχύει

$$3x_1+y_1=5. \qquad (2)$$

Όμως, το σημείο $M_1(x_1,y_1)$ ανήκει στον κύκλο C. Άρα, θα ισχύει

$$x_1^2+y_1^2=5. \qquad (3)$$

Επομένως, οι συντεταγμένες (x_1,y_1) του M_1 είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων (2) και (3). Λύνουμε το σύστημα αυτό και βρίσκουμε δύο λύσεις:

$$(x_1,y_1)=(1,2) \quad \text{ή} \quad (x_1,y_1)=(2,-1) \qquad (4)$$

Άρα, υπάρχουν δύο εφαπτόμενες του C που διέρχονται από το σημείο $A(3,1)$, οι οποίες, λόγω των (1) και (4), έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1 : x + 2y = 5, \qquad \varepsilon_2 : 2x - y = 5.$$

Επειδή οι συντελεστές διεύθυνσης των ε_1 και ε_2 είναι $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_2 = 2$, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.

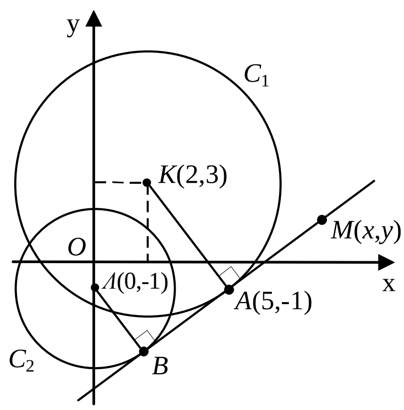
2. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : (x-2)^2+(y-3)^2=5^2$ και $C_2 : x^2+(y+1)^2=3^2$.

(i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου C_1 στο σημείο $A(5,-1)$.

(ii) Να αποδειχτεί ότι η ε εφάπτεται και του κύκλου C_2.

ΛΥΣΗ

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(2,3)$ και ακτίνα 5, ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(0,-1)$ και ακτίνα 3.



(i) Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν $AM \perp KA$, δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0. \qquad (1)$$

Όμως, $\overrightarrow{KA} = (3,-4)$ και $\overrightarrow{AM} = (x-5, y+1)$.
Έτσι, η (1) γράφεται διαδοχικά

$$3(x-5)-4(y+1)=0$$

$$3x-4y-19=0.$$

Άρα, η εξίσωση της ε είναι:

$$3x-4y-19=0. \qquad (2)$$

(ii) Για να δείξουμε ότι η ε εφάπτεται του κύκλου C_2, αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση του κέντρου $\Lambda(0,-1)$ του C_2 από την ε είναι ίση με την ακτίνα του C_2, δηλαδή ίση με 3.
Έχουμε λοιπόν:

$$d(\Lambda, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 0 - 4(-1) - 19|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{15}{5} = 3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(1,\sqrt{3})$.

(ii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(\alpha-\beta, \alpha+\beta)$

(iii) Όταν εφάπτεται της ευθείας $x-y=2$

(iv) Όταν εφάπτεται της ευθείας $\alpha x+\beta y=\alpha^2+\beta^2$

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=5$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+3$

(ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$

(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$

3. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου $x^2+y^2=2$ στα σημεία $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $\Gamma(-1,-1)$ και $\Delta(1,-1)$ σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιες τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Ποιο είναι το εμβαδόν του τετραγώνου αυτού;

4. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2+y^2=4$ που έχει μέσο το σημείο $M(1,-1)$.

5. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν έχει κέντρο $K(0,1)$ και διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3},0)$

(ii) Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα $A(-1,2)$ και $B(7,8)$

(iii) Όταν έχει ακτίνα $\rho=5$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1,0)$ και $B(7,0)$

(iv) Όταν διέρχεται από τα σημεία $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $y=x$

(v) Όταν τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $\Gamma(0,-2)$ και $\Delta(0,\mu)$.

(vi) Όταν εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $A(3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $B(1,2)$.

(vii) Όταν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x+4y=12$ στο σημείο $A(0,3)$.

6. Να βρείτε το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση

(i) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ (ii) $x^2+y^2-10x+12y-20=0$

(iii) $3x^2+3y^2+6x-9y+1=0$ (iv) $x^2+y^2-4\alpha x+10\beta y+4\alpha^2+16\beta^2=0$.

7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

(i) $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ στο σημείο του $A(1,-1)$

(ii) $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2-3\beta^2=0$ στο σημείο του $A(\alpha,-\beta)$.

8. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων:

$$C_1: x^2+y^2=1 \quad \text{και} \quad C_2: (x-1)^2+y^2=4 .$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(x-\alpha)(x\text{-}\beta)+(y\text{-}\gamma)(y-\delta)=0$$

παριστάνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τετραπλεύρου με κορυφές τα σημεία $A(\alpha,\gamma)$, $B(\beta,\gamma)$, $\Gamma(\beta,\delta)$, $\Delta(\alpha,\delta)$ και ότι οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι διάμετροι αυτού του κύκλου.

2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x\sigma\upsilon\nu\varphi+y\eta\mu\varphi=4\eta\mu\varphi-2\sigma\upsilon\nu\varphi+4$ εφάπτεται του κύκλου $x^2+y^2+4x-8y+4=0$.

3. Από ένα σημείο $M_0(x_0,y_0)$ εκτός του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενές του. Αν M_1, M_2 είναι τα σημεία επαφής, να αποδείξετε ότι η χορδή M_1M_2 έχει εξίσωση $xx_0+yy_0=\rho^2$.

4. Έστω C ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $A(3\alpha,0)$. Έστω επιπλέον M ένα σημείο του C . Να αποδείξετε ότι όταν το M διαγράφει τον C , τότε το κέντρο βάρους G του τριγώνου OAM διαγράφει τον κύκλο $(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2$.

5. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο $x^2+y^2=\rho^2$ είναι κάθετες.

6. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία $A(-3,0)$ και $B(3,0)$ είναι σταθερός και ίσος με 2.

7. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή των αξόνων είναι ίσο με το τετραπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $x=1$.

8. Έστω το τρίγωνο με κορυφές $A(3,5)$, $B(2,-4)$ και $\Gamma(-5,-1)$. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει $MA^2+MB^2+M\Gamma^2=107$ είναι κύκλος με κέντρο το κέντρο βάρους του τριγώνου $AB\Gamma$.

9. Να αποδείξετε ότι καθώς το θ διαγράφει το διάστημα $[0,2\pi)$, το σημείο τομής των ευθειών

$$x\text{συν}\theta+y\text{ημ}\theta=\alpha \quad \text{και} \quad x\text{ημ}\theta-y\text{συν}\theta=\beta$$

διαγράφει τον κύκλο

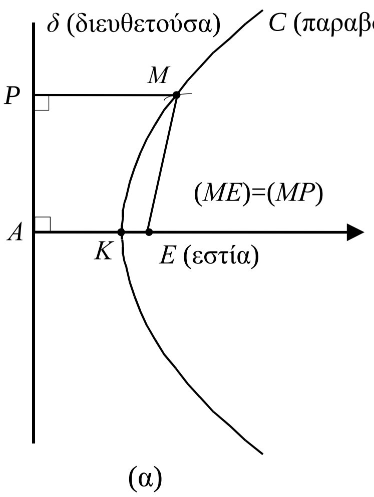
$$x^2+y^2=\alpha^2+\beta^2.$$

10. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2+y^2=25$, που διέρχονται από το σημείο $A(2,4)$.

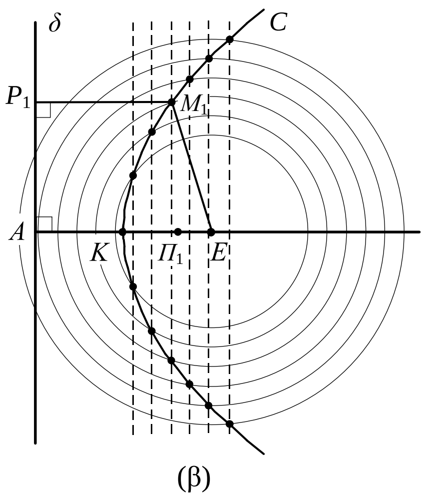
3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Ορισμός Παραβολής

Έστω μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ. Ονομάζεται **παραβολή** με **εστία** το σημείο E και **διευθετούσα** την ευθεία δ ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από την E και τη δ (Σχ. α). Αν A είναι η προβολή της εστίας E στη διευθετούσα δ, τότε το μέσο K του EA είναι προφανώς σημείο της παραβολής και λέγεται **κορυφή** της.



(α)

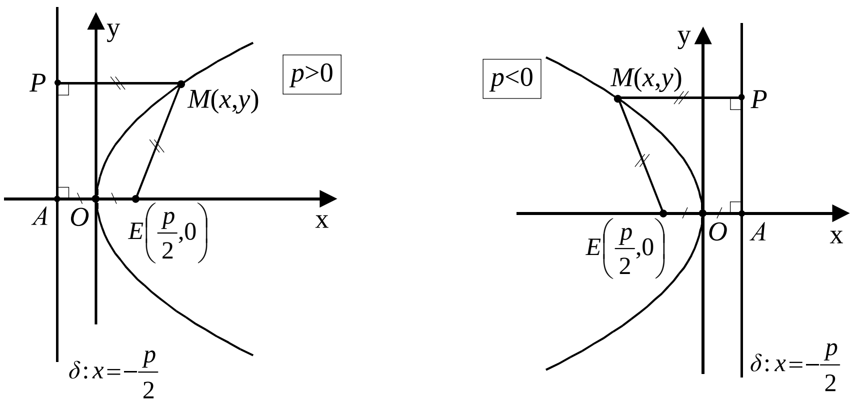


(β)

Για να βρούμε ένα σημείο της παραβολής *C*, εργαζόμαστε ως εξής: Παίρνουμε ένα σημείο Π_1 της ημιευθείας *ΚΕ* (Σχ. β) και από το σημείο αυτό φέρνουμε την κάθετη στην *ΚΕ* και έστω M_1 ένα από τα σημεία τομής της κάθετης αυτής και του κύκλου με κέντρο το *Ε* και ακτίνα $\Pi_1 A$. Τότε, το σημείο M_1 είναι σημείο της παραβολής *C*. Πράγματι, αν P_1 είναι η ορθή προβολή του M_1 στη διευθετούσα *δ*, τότε θα ισχύει $(M_1P_1)=(\Pi_1 A)=(M_1E)$, δηλαδή $d(M_1,\delta)=d(M_1,E)$.

Εξίσωση Παραβολής

• Έστω *C* μια παραβολή με εστία *Ε* και διευθετούσα *δ*. Θα βρούμε την εξίσωση της παραβολής *C* ως προς σύστημα συντεταγμένων *Oxy* με αρχή *Ο* την κορυφή της παραβολής και άξονα $x'x$ την κάθετη από το *Ε* στην *δ*.



Αν στο σύστημα αυτό η τετμημένη της εστίας *Ε* είναι $\frac{p}{2}$, τότε η εξίσωση της διευθετούσας θα είναι $x=-\frac{p}{2}$.

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραβολής, ένα σημείο $M(x,y)$ θα ανήκει στη *C*, αν και μόνο αν ισχύει

$$d(M,E)=d(M,\delta). \qquad (1)$$

Είναι όμως

$$d(M,E)=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} \quad \text{και} \quad d(M,\delta)=\frac{\left|x+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Έτσι, η σχέση (1) γράφεται διαδοχικά

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

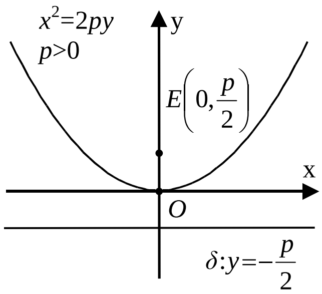
$$y^2=2px. \qquad (2)$$

Επομένως, η εξίσωση της παραβολής C με εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα $\delta: x=-\frac{p}{2}$ είναι

$$\boxed{y^2=2px}$$

Για παράδειγμα, η παραβολή με εστία το σημείο $E(1,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $x=-1$ έχει $p=2$ και επομένως έχει εξίσωση $y^2=4x$.

Ο αριθμός $\boldsymbol{p}$ λέγεται **παράμετρος** της παραβολής και η $|p|$ παριστάνει την απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα.

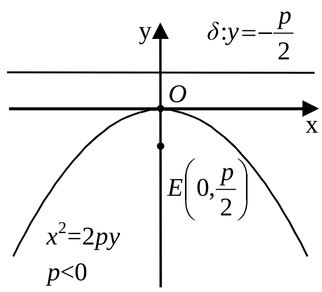


- Αν τώρα πάρουμε σύστημα συντεταγμένων Oxy με αρχή O την κορυφή της παραβολής και άξονα $y'y$ την κάθετη από το E στη δ και εργαστούμε όπως πριν, θα βρούμε ότι η παραβολή C έχει εξίσωση

$$\boxed{x^2=2py}$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται ισοδύναμα $y=\frac{1}{2p}x^2$ και παριστάνει τη γραφική παράσταση της γνωστής μας από την Α΄ Λυκείου συνάρτησης

$$y=\alpha x^2, \quad \text{όπου} \quad \alpha=\frac{1}{2p}$$



Για παράδειγμα, η εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$ παριστάνει την παραβολή που έχει $p=2$ και άρα έχει εστία το σημείο $E(0,1)$ και διευθετούσα την ευθεία $y=-1$.

Ιδιότητες Παραβολής

Έστω μια παραβολή

$$y^2=2px. \tag{1}$$

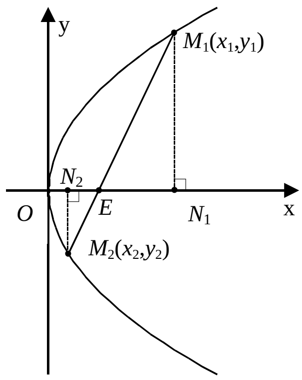
- Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι τα *p* και *x* (με $x\neq 0$) είναι ομόσημα. Άρα, κάθε φορά η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία *Ε*. Επομένως, η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η διευθετούσα *δ* και η εστία *Ε*.

- Αν το σημείο $M_1(x_1,y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, δηλαδή, αν $y_1^2=2px_1$, τότε και το σημείο $M_2(x_1,-y_1)$ θα είναι σημείο της ίδιας παραβολής, αφού $(-y_1)^2=2px_1$. Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής. Επομένως, η κάθετη από την εστία στη διευθετούσα είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και λέγεται **άξονας** της παραβολής.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω η παραβολή $y^2=2px$ και μια ευθεία που διέρχεται από την εστία της και τέμνει την παραβολή στα σημεία M_1 και M_2. Να αποδειχτεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων των M_1 και M_2 από τον άξονα $x'x$ είναι σταθερό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Αν (x_1,y_1) και (x_2,y_2) είναι οι συντεταγμένες των M_1 και M_2 αντιστοίχως, τότε οι αποστάσεις των M_1 και M_2 από τον άξονα $x'x$ θα είναι ίσες με $|y_1|$ και $|y_2|$ αντιστοίχως. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι το $|y_1||y_2|$ είναι σταθερό. Επειδή τα σημεία (x_1,y_1), (x_2,y_2) ανήκουν στην παραβολή $y^2=2px$, θα ισχύει

$$y_1^2=2px_1 \quad \text{και} \quad y_2^2=2px_2.$$

Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων M_1 και M_2 θα είναι

$$\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right) \quad \text{και} \quad \left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$$

αντιστοίχως.

Όμως, τα σημεία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $M_1\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right)$, $M_2\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$ είναι συνευθειακά.

Επομένως: $\overrightarrow{EM_1} // \overrightarrow{EM_2}$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\det(\overrightarrow{EM_1}, \overrightarrow{EM_2}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{y_1^2}{2p} - \frac{p}{2} & y_1 \\ \frac{y_2^2}{2p} - \frac{p}{2} & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{(y_1^2 - p^2)y_2}{2p} - \frac{(y_2^2 - p^2)y_1}{2p} = 0$$

$$y_1^2 y_2 - y_2^2 y_1 - p^2 y_2 + p^2 y_1 = 0$$

$$y_1 y_2 (y_1 - y_2) = -p^2 (y_1 - y_2)$$

$$y_1 y_2 = -p^2, \qquad \text{αφού} \quad y_1 \neq y_2.$$

Άρα $\quad |y_1| \cdot |y_2| = |y_1 y_2| = p^2$. $\qquad$ (σταθερό)

Εφαπτομένη Παραβολής

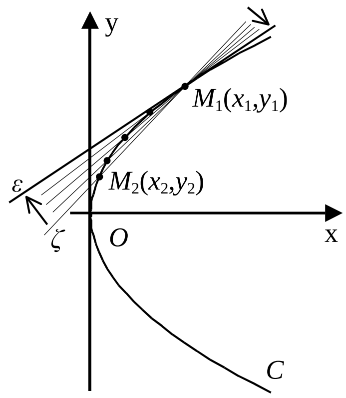
- Έστω μια παραβολή C με εξίσωση

$$y^2 = 2px \qquad (1)$$

και ένα σταθερό της σημείο $M_1(x_1, y_1)$.

Έστω επιπλέον μια μη κατακόρυφη ευθεία ζ που διέρχεται από το $M_1(x_1, y_1)$ και τέμνει την παραβολή και σε ένα άλλο σημείο $M_2(x_2, y_2)$. Τότε η ζ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



και επειδή διέρχεται από το σημείο $M_1(x_1,y_1)$, θα έχει εξίσωση

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\,. \tag{2}$$

Επειδή τα σημεία $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ ανήκουν στην παραβολή, οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν την εξίσωση (1). Άρα, θα ισχύει

$$y_1^2=2px_1 \quad \text{και} \quad y_2^2=2px_2\,,$$

οπότε θα έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} y_2^2-y_1^2 &= 2p(x_2-x_1) \\ (y_2-y_1)(y_2+y_1) &= 2p(x_2-x_1) \\ \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} &= \frac{2p}{y_2+y_1}\,. \end{aligned}$$

Έτσι, η εξίσωση (2) θα πάρει τη μορφή

$$y-y_1=\frac{2p}{y_2+y_1}(x-x_1)\,,$$

δηλαδή τη μορφή

$$(y_2+y_1)(y-y_1)=2p(x-x_1)\,. \tag{3}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο $M_2(x_2,y_2)$, κινούμενο πάνω στην παραβολή *C*, τείνει να συμπέσει με το σημείο $M_1(x_1,y_1)$. Τότε το y_2 τείνει να γίνει ίσο με y_1, οπότε η εξίσωση (3) της τέμνουσας *ζ* τείνει να πάρει τη μορφή

$$(y_1+y_1)(y-y_1)=2p(x-x_1)\,,$$

δηλαδή τη μορφή

$$y_1(y-y_1)=p(x-x_1)\,. \tag{4}$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει την ευθεία *ε*, που είναι η *οριακή θέση* της τέμνουσας *ζ*, καθώς το M_2 *τείνει να συμπέσει* με το M_1. Η ευθεία *ε* λέγεται **εφαπτομένη** της παραβολής στο σημείο M_1. Η εξίσωση της εφαπτομένης γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} y_1y-y_1^2 &= px-px_1 \\ yy_1-2px_1 &= px-px_1 \\ yy_1 &= px+px_1 \\ yy_1 &= p(x+x_1)\,. \end{aligned}$$

Επομένως, η εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$\boxed{yy_1 = p(x+x_1)}$$

Για παράδειγμα, η εφαπτομένη της παραβολής $y^2=4x$ στο σημείο της $M_1(2,1)$ έχει εξίσωση $y\cdot 2=2(x+1)$, η οποία γράφεται $y=x+1$.

- Αν μια παραβολή έχει εξίσωση

$$\boldsymbol{x^2 = 2py},$$

τότε η εφαπτομένη της στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$\boldsymbol{xx_1 = p(y+y_1)}.$$

Ανακλαστική Ιδιότητα Παραβολής

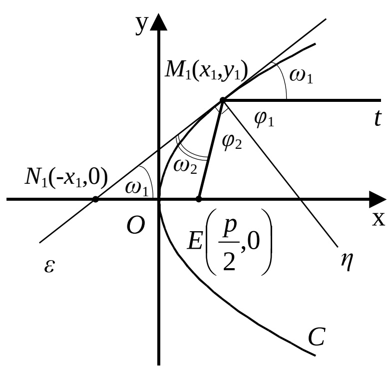
Μια σπουδαία ιδιότητα της παραβολής, γνωστή ως *ανακλαστική ιδιότητα* είναι η εξής:

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής M_1 διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1t, που είναι ομόρροπη της *ΟΕ*, όπου *Ε* είναι η εστία της παραβολής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ε η εφαπτομένη της παραβολής στο $M_1(x_1,y_1)$ και N_1 το σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$. Για να δείξουμε ότι $\varphi_1=\varphi_2$, αρκεί να δείξουμε ότι $\omega_1=\omega_2$ ή ισοδύναμα ότι

$$(EM_1)=(EN_1).$$



Πράγματι, επειδή η ε έχει εξίσωση $yy_1=p(x+x_1)$, το N_1 θα έχει συντεταγμένες $(-x_1,0)$, οπότε θα ισχύει

$$(EM_1)=\sqrt{\left(x_1-\frac{p}{2}\right)^2+y_1^2} \quad \text{και} \quad (EN_1)=\left|\frac{p}{2}+x_1\right|.$$

Επομένως, έχουμε:

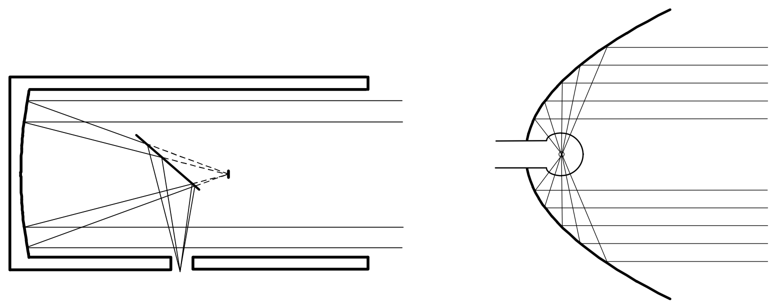
$$(EM_1)=\sqrt{\left(x_1-\frac{p}{2}\right)^2+y_1^2}=\sqrt{\left(x_1-\frac{p}{2}\right)^2+2px_1}$$

$$=\sqrt{\left(x_1+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x_1+\frac{p}{2}\right|=(EN_1)\,. \qquad \blacksquare$$

Η χρήση της παραπάνω ιδιότητας γίνεται στα παραβολικά τηλεσκόπια, στα ραντάρ, στα φανάρια των αυτοκινήτων, στους προβολείς των οδοντιάτρων κτλ. Συγκεκριμένα:

— Όλες οι ακτίνες φωτός που προσπίπτουν στο παραβολικό κάτοπτρο παράλληλα προς τον άξονά του, ανακλώμενες, συγκεντρώνονται στην εστία.

— Στα φανάρια των αυτοκινήτων που έχουν παραβολικά κάτοπτρα οι λαμπτήρες βρίσκονται στην εστία τους. Έτσι, οι φωτεινές ακτίνες, ανακλώμενες στο κάτοπτρο, εξέρχονται παράλληλα προς τον άξονά του.



ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη, για να φέρουμε την εφαπτομένη μιας παραβολής σε ένα σημείο της $M_1(x_1,y_1)$, αρκεί να ενώσουμε το σημείο $N_1(-x_1,0)$ με το $M_1(x_1,y_1)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

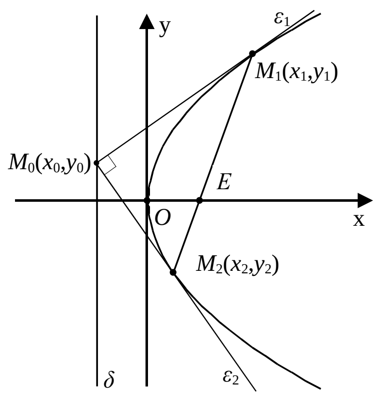
1. **Έστω η παραβολή $C: y^2=2px$ και ε_1, ε_2 οι εφαπτόμενες της παραβολής από ένα σημείο $M_0(x_0,y_0)$ με $x_0\neq 0$. Αν M_1, M_2 είναι τα σημεία επαφής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ με την παραβολή *C*, να αποδειχτεί ότι**

(i) Η ευθεία M_1M_2 έχει εξίσωση $yy_0=p(x+x_0)$

(ii) Η ευθεία M_1M_2 διέρχεται από την εστία, αν και μόνο αν το M_0 ανήκει στη διευθετούσα της παραβολής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Αν (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι οι συντεταγμένες των σημείων M_1 και M_2, τότε οι εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 θα έχουν εξισώσεις:



$$\varepsilon_1 : yy_1 = p(x + x_1)$$

$$\varepsilon_2 : yy_2 = p(x + x_2)$$

και επειδή οι ε_1 και ε_2 διέρχονται από το $M_0(x_0, y_0)$, θα ισχύουν

$y_0 y_1 = p(x_0 + x_1)$ και $y_0 y_2 = p(x_0 + x_2)$.

Επομένως, οι συντεταγμένες των M_1 και M_2 θα επαληθεύουν την εξίσωση

$$y_0 y = p(x_0 + x) \qquad (1)$$

Άρα, η (1) θα είναι η εξίσωση της χορδής $M_1 M_2$.

(ii) Λόγω της (i), η ευθεία $M_1 M_2$ διέρχεται από την εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες της E επαληθεύουν την εξίσωση της $yy_0 = p(x + x_0)$, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει $y_0 0 = p\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)$ ή ισοδύναμα

$$x_0 = -\frac{p}{2},$$

που συμβαίνει, αν και μόνο αν το σημείο $M_0(x_0, y_0)$ ανήκει στη διευθετούσα $x = -\frac{p}{2}$ της παραβολής.

ΣΧΟΛΙΟ

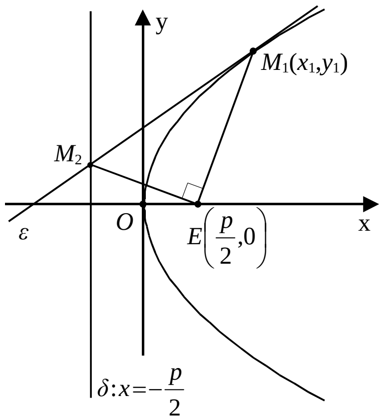
Η ευθεία $M_1 M_2$ λέγεται *πολική* του σημείου M_0 ως προς την παραβολή *C*, ενώ το σημείο M_0 λέγεται *πόλος* της $M_1 M_2$ ως προς την *C*. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση της πολικής ενός σημείου $M_0(x_0, y_0)$ ως προς την παραβολή $C : y^2 = 2px$ έχει τη μορφή που θα είχε η εφαπτομένη της *C* στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$, αν αυτό ανήκε στην *C*.

2. Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$ και η εφαπτομένη της ε σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$, η οποία τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο M_2. Να αποδειχτεί ότι $M_1 \hat{E} M_2 = 90^0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η εξίσωση της ε είναι

$$yy_1 = p(x + x_1) . \qquad (1)$$



Επειδή το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, ισχύει $y_1^2 = 2px_1$, οπότε $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$. Άρα, οι συντεταγμένες του M_1 είναι

$$\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right).$$

Έτσι, η εξίσωση (1) γράφεται

$$yy_1 = p\left(x + \frac{y_1^2}{2p}\right) \quad \text{ή} \quad 2yy_1 = 2px + y_1^2 . \qquad (2)$$

Επομένως, οι συντεταγμένες του M_2 θα είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x = -\frac{p}{2} \\ 2yy_1 = 2px + y_1^2 \end{cases}.$$

Από την επίλυση του συστήματος αυτού βρίσκουμε ότι οι συντεταγμένες του M_2 είναι

$$\left(-\frac{p}{2}, \frac{y_1^2 - p^2}{2y_1}\right).$$

Έτσι, έχουμε

$$\lambda_{EM_1} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2p} - \frac{p}{2}} = \frac{2py_1}{y_1^2 - p^2} \quad \text{και} \quad \lambda_{EM_2} = \frac{\frac{y_1^2 - p^2}{2y_1}}{-p} = \frac{y_1^2 - p^2}{-2py_1}.$$

Άρα, $\lambda_{EM_1} \cdot \lambda_{EM_2} = -1$, που σημαίνει ότι $EM_1 \perp EM_2$, δηλαδή ότι $M_1 \hat{E} M_2 = 90^0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
(i) Όταν έχει εστία το σημείο $E(-1,0)$
(ii) Όταν έχει διευθετούσα την ευθεία $x = \frac{1}{2}$
(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

2. Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση:
(i) $y^2 = 8x$ (ii) $y^2 = -8x$
(iii) $y = \frac{1}{4}x^2$ (iv) $y = -\frac{1}{4}x^2$
(v) $y^2 = 4\alpha x$ (vi) $y = \frac{1}{4\alpha}x^2$.

3. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Να αποδειχτεί ότι η κορυφή της παραβολής είναι το πλησιέστερο στην εστία σημείο της.

4. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων A και B της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$, που έχουν την ίδια τεταγμένη και ισχύει $A\hat{O}B = 90^0$.

5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
(i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 1$
(ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y = -2x$
(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$.

6. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής $y = \frac{1}{4}x^2$ στα σημεία $A(4,4)$ και $B\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ τέμνονται κάθετα και πάνω στη διευθετούσα της.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδειχτεί ότι ο κύκλος $(x-3)^2+y^2=8$ εφάπτεται της παραβολής $y^2=4x$. (Δηλαδή, έχουν τις ίδιες εφαπτόμενες στα κοινά σημεία τους).

2. Έστω η παραβολή $y^2=12x$. Αν η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $A(1,2\sqrt{3})$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο *Β*, να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο EAB είναι ισόπλευρο.

3. Έστω η παραβολή $y^2=4x$. Αν η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $A(3,2\sqrt{3})$ τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο *Β*, να αποδειχτεί ότι ο κύκλος με διάμετρο AB εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στην εστία της παραβολής..

4. Έστω *Μ* ένα σημείο της παραβολής $y^2=2px$. Να αποδειχτεί ότι ο κύκλος με διάμετρο EM , όπου *Ε* η εστία της παραβολής, εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

5. Έστω η παραβολή $y^2=2px$ και η εφαπτομένη της ε σε ένα σημείο $A(x_1,y_1)$ αυτής. Αν η ευθεία OA τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο B , να αποδειχτεί ότι $BE//\varepsilon$.

6. Αν η εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της A τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο B και τον άξονα $y'y$ στο σημείο K , να αποδειχτεί ότι

(i) $A\hat{E}B=90^0$, (ii) $EK\perp AB$ και (iii) $(EK)^2=(KA)(KB)$.

7. Έστω η παραβολή $y^2=2px$ και ένα σημείο της $A(x_1,y_1)$. Φέρνουμε την εφαπτομένη της παραβολής στο *Α*, που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο *Β* και την παράλληλη από το *Α* στον άξονα $x'x$, που τέμνει τη διευθετούσα στο *Γ*. Να αποδειχτεί ότι το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι ρόμβος με κέντρο στον άξονα $y'y$.

8. Δίνονται οι παραβολές $C_1: y^2=2px$ και $C_2: x^2=2py$

(i) Να αποδείξετε ότι οι C_1 και C_2 τέμνονται στα σημεία $O(0,0)$ και $A(2p,2p)$

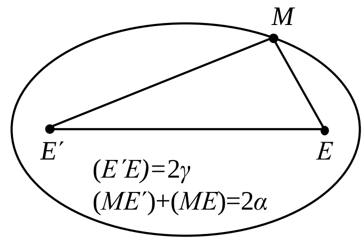
(ii) Αν οι εφαπτόμενες των C_1 και C_2 στο A τέμνουν τις C_2 και C_1 στα σημεία B και Γ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι η $B\Gamma$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_1 και C_2

3.3 *Η ΕΛΛΕΙΨΗ*

Ορισμός Έλλειψης

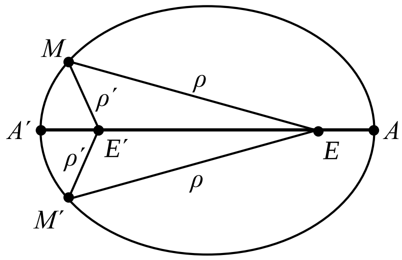
Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται **έλλειψη** με **εστίες** τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι *σταθερό* και μεγαλύτερο του $E'E$. Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε, συνήθως, με **2α** και την απόσταση των εστιών E' και E με **2γ**. Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της έλλειψης.

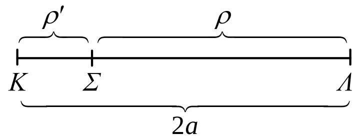
Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:



α) Ένα σημείο *Μ* του επιπέδου είναι σημείο της έλλειψης, αν και μόνο αν

$$\boldsymbol{(ME') + (ME) = 2\alpha}$$



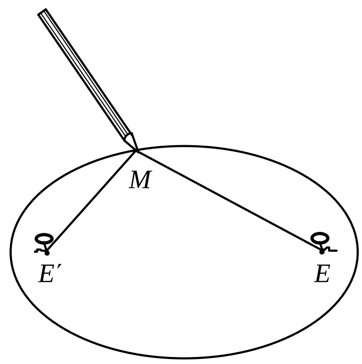


β) Ισχύει $(E'E) < (ME') + (ME)$, δηλαδή $2\gamma < 2\alpha$ οπότε ***γ<α***. Αν $\gamma = 0$, τότε τα σημεία E', E συμπίπτουν, οπότε η έλλειψη γίνεται κύκλος με κέντρο το *Ε* και ακτίνα *α*.

Για να βρούμε ένα σημείο της έλλειψης *C*, εργαζόμαστε ως εξής:

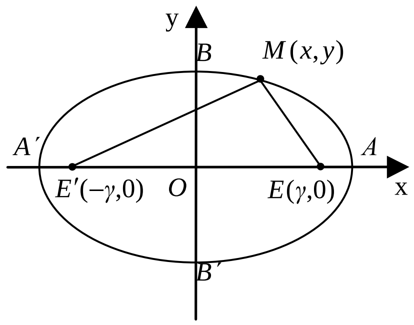
Παίρνουμε ένα τμήμα *ΚΛ* μήκους 2*α* και ένα οποιοδήποτε σημείο του *Σ*. Με κέντρα τα E' και E και ακτίνες $\rho' = (K\Sigma)$ και $\rho = (\Lambda\Sigma)$, αντιστοίχως, γράφουμε δύο κύκλους, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία *Μ* και M'. Τα σημεία *Μ* και M' είναι σημεία της έλλειψης, γιατί ισχύει $(ME') + (ME) = \rho' + \rho = 2\alpha$ και $(M'E') + (M'E) = \rho' + \rho = 2\alpha$.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε οσαδήποτε σημεία της έλλειψης.



Πρακτικά μπορούμε να σχεδιάσουμε την έλλειψη ως εξής: Παίρνουμε ένα σχοινί μήκους 2α και στερεώνουμε τα άκρα του στις εστίες E' και *Ε*. Αν τώρα με ένα μολύβι διατηρούμε το σχοινί τεντωμένο, τότε αυτό, κατά την κίνησή του, θα διαγράψει την έλλειψη.

Εξίσωση Έλλειψης



- Έστω μια έλλειψη C με εστίες E' και E. Θα βρούμε την εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα των x την ευθεία $E'E$ και άξονα των y τη μεσοκάθετο του $E'E$.

Αν $M(x,y)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης C, τότε θα ισχύει

$$(ME')+(ME)=2\alpha\,. \qquad (1)$$

Επειδή $(E'E)=2\gamma$, οι εστίες E' και E θα έχουν συντεταγμένες $(-\gamma,0)$ και $(\gamma,0)$ αντιστοίχως. Επομένως,

$$(ME')=\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2} \quad \text{και} \quad (ME)=\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}\,.$$

Έτσι, η σχέση (1) γράφεται

$$\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}+\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=2\alpha\,,$$

από την οποία έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}=2\alpha-\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}$$

$$(x+\gamma)^2+y^2=4\alpha^2+(x-\gamma)^2+y^2-4\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}$$

$$x^2+\gamma^2+2\gamma x+y^2=4\alpha^2+x^2+\gamma^2-2\gamma x+y^2-4\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}$$

$$\boldsymbol{\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=\alpha^2-\gamma x} \qquad (2)$$

$$\alpha^2(x^2+\gamma^2-2\gamma x+y^2)=(\alpha^2-\gamma x)^2$$

$$\alpha^2x^2+\alpha^2\gamma^2-2\alpha^2\gamma x+\alpha^2y^2=\alpha^4+\gamma^2x^2-2\alpha^2\gamma x$$

$$(\alpha^2-\gamma^2)x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2(\alpha^2-\gamma^2)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-\gamma^2}=1\,. \qquad (3)$$

Επειδή $\alpha>\gamma$, είναι $\alpha^2-\gamma^2>0$, οπότε αν θέσουμε $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$, η εξίσωση (3) παίρνει τη μορφή

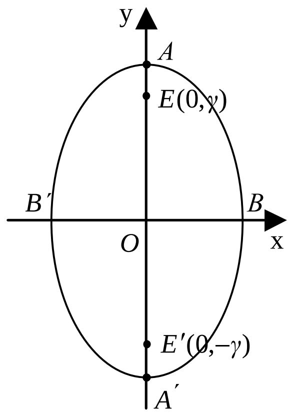
$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\,. \qquad (4)$$

Αποδεικνύεται και το *αντίστροφο*, δηλαδή ότι κάθε σημείο $M(x,y)$, του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση (4), είναι σημείο της έλλειψης *C*. Επομένως, η εξίσωση της έλλειψης *C* με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$, $E(4,0)$ και σταθερό άθροισμα $2\alpha=10$ είναι

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1, \quad \text{αφού} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3.$$



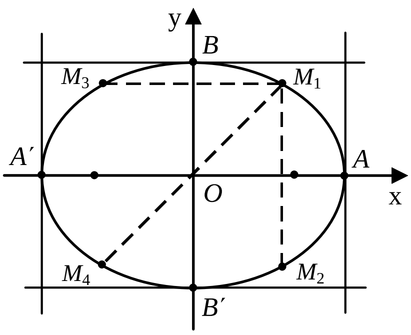
- Αν τώρα πάρουμε σύστημα συντεταγμένων *Oxy* με άξονα των *x* τη μεσοκάθετο του $E'E$ και άξονα των *y* την ευθεία $E'E$ και εργαστούμε όπως πριν, θα βρούμε ότι η εξίσωση της έλλειψης *C* είναι

$$\boxed{\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$$

Για παράδειγμα, η έλλειψη με εστίες $E'(0,-4)$, $E(0,4)$ και σταθερό άθροισμα $2\alpha=10$ είναι

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1, \quad \text{αφού} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3.$$

Ιδιότητες Έλλειψης



Έστω μια έλλειψη

$$C:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$$

- Αν $M_1(x_1,y_1)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης *C*, τότε τα σημεία $M_2(x_1,-y_1)$, $M_3(-x_1,y_1)$ και $M_4(-x_1,-y_1)$ ανήκουν στην *C*, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω έλλειψη έχει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας. Επομένως, η ευθεία που ενώνει τις εστίες E', E της έλλειψης και η μεσοκάθετος του $E'E$ είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης, ενώ το μέσο O του $E'E$ είναι κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο O λέγεται **κέντρο** της έλλειψης.

- Από την εξίσωση της έλλειψης για $y=0$ βρίσκουμε $x=\pm\alpha$, ενώ για $x=0$ βρίσκουμε $y=\pm\beta$. Επομένως, η έλλειψη C τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha,0)$ και $A(\alpha,0)$, ενώ τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B'(0,-\beta)$ και $B(0,\beta)$. Τα σημεία A',A,B',B λέγονται **κορυφές** της έλλειψης, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα $A'A$ και $B'B$, τα οποία έχουν μήκη $(A'A)=2\alpha$ και $(B'B)=2\beta$, λέγονται **μεγάλος άξονας** και **μικρός άξονας** αντιστοίχως. Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς O σημεία M_1 και M_4 της έλλειψης λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης. Αποδεικνύεται ότι

$$\boldsymbol{2\beta \leq (M_1 M_4) \leq 2\alpha},$$

δηλαδή ότι κάθε διάμετρος της έλλειψης είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μικρό άξονα και μικρότερη ή ίση από το μεγάλο άξονα της έλλειψης.

- Τέλος, από την εξίσωση της έλλειψης, έχουμε

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{y^2}{\beta^2} \leq 1$$

οπότε

$$x^2 - \alpha^2 \leq 0$$

και άρα

$$\boldsymbol{-\alpha \leq x \leq \alpha}.$$

Ομοίως

$$\boldsymbol{-\beta \leq y \leq \beta}.$$

Άρα, η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x=-\alpha$, $x=\alpha$ και $y=-\beta$, $y=\beta$.

Εκκεντρότητα Έλλειψης

Μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή της έλλειψης είναι η εκκεντρότητα της έλλειψης. Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και τη συμβολίζουμε με **ε**, το λόγο $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}<1$. Επειδή $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$, είναι $\varepsilon=\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}$,

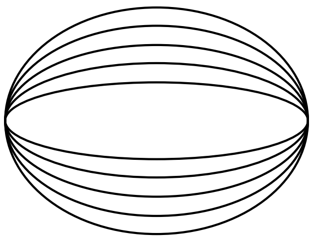
οπότε $\varepsilon^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ και άρα

$$\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}\,. \qquad (1)$$

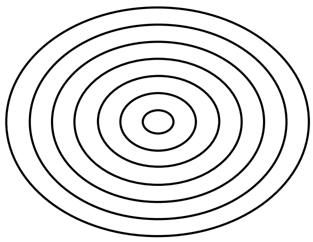
Επομένως, όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα τόσο μικραίνει ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ και κατά συνέπεια τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη (Σχ. α).

Όταν το ε τείνει στο μηδέν, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 1 και επομένως η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Όταν, όμως, το ε τείνει στη μονάδα, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 0 και επομένως η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα.

Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα, άρα ίδιο λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$, λέγονται **όμοιες** (Σχ. β).



(α)



(β)

Είναι γνωστό από την Αστρονομία ότι οι τροχιές των πλανητών γύρω από τον Ήλιο είναι ελλείψεις, των οποίων τη μία εστία κατέχει ο Ήλιος. Οι εκκεντρότητες των τροχιών αυτών είναι οι εξής:

Πλανήτης	εκκεντρότητα	Πλανήτης	εκκεντρότητα
Ερμής	0,206	Κρόνος	0,051
Αφροδίτη	0,007	Ουρανός	0,046
Γη	0,017	Ποσειδώνας	0,005
Άρης	0,093	Πλούτωνας	0,250
Δίας	0,049		

Παραμετρικές Εξισώσεις Έλλειψης

Έστω η έλλειψη $C\colon \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και ένα σημείο $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

— Αν το $M(x,y)$ ανήκει στην έλλειψη C, τότε θα ισχύει $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, οπότε θα έχουμε

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2=1.$$

Επομένως, το σημείο $N\left(\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\beta}\right)$ θα ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο, οπότε θα υπάρχει γωνία $\varphi\in[0,2\pi)$, τέτοια, ώστε $\frac{x}{\alpha}=\text{συν}\varphi$ και $\frac{y}{\beta}=\text{ημ}\varphi$, δηλαδή

$$x=\alpha\text{συν}\varphi \quad \text{και} \quad y=\beta\text{ημ}\varphi. \tag{1}$$

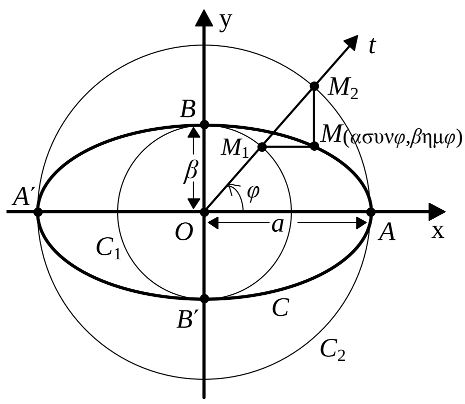
— *Αντιστρόφως*, αν ισχύουν οι (1) για κάποια γωνία $\varphi\in[0,2\pi)$, τότε το σημείο $M(x,y)$ θα ανήκει στην έλλειψη C, αφού

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=\frac{\alpha^2\text{συν}^2\varphi}{\alpha^2}+\frac{\beta^2\text{ημ}^2\varphi}{\beta^2}=\text{συν}^2\varphi+\text{ημ}^2\varphi=1.$$

Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων $M(x,y)$ της έλλειψης C και μόνο αυτές ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\boldsymbol{x=\alpha\text{συν}\varphi \quad \text{και} \quad y=\beta\text{ημ}\varphi,\ \ \varphi\in[0,2\pi)}.$$

Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις** της έλλειψης C. Σύμφωνα με τις παραμετρικές εξισώσεις το σημείο $M(\alpha\text{συν}\varphi,\beta\text{ημ}\varphi)$ της έλλειψης προσδιορίζεται ως εξής:
Γράφουμε τους κύκλους C_1 και C_2 με κέντρο O και ακτίνες β και α αντιστοίχως και φέρνουμε μια ημιευθεία Ot, έτσι ώστε $(\widehat{Ox,Ot})=\varphi$. Αν η ημιευθεία Ot τέμνει τους C_1 και C_2 στα σημεία M_1 και M_2

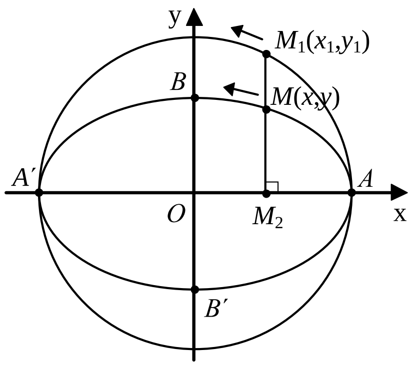


αντιστοίχως και οι παράλληλες από τα M_1, M_2 προς τους άξονες $x'x$, $y'y$, αντιστοίχως, τέμνονται στο σημείο *Μ*, τότε το *Μ* θα ανήκει στην έλλειψη *C*. Πράγματι, το σημείο M_1 θα έχει συντεταγμένες $(\beta\sigma\upsilon\nu\varphi, \beta\eta\mu\varphi)$, ενώ το M_2 θα έχει συντεταγμένες $(\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi, \alpha\eta\mu\varphi)$. Άρα, οι συντεταγμένες του *Μ* θα είναι $(\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi, \beta\eta\mu\varphi)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ο κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$, $\alpha>0$ και ένα σημείο του M_1, του οποίου η ορθή προβολή στον άξονα $x'x$ είναι το σημείο M_2. Πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα M_1M_2 ορίζουμε ένα σημείο *Μ*, τέτοιο, ώστε να ισχύει $\frac{(M_2M)}{(M_2M_1)}=\frac{\beta}{\alpha}$, $0<\beta<\alpha$. Να αποδειχτεί ότι αν το M_1 κινείται στον κύκλο, το *Μ* κινείται στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω (x_1, y_1) οι συντεταγμένες του M_1 και (x, y) οι συντεταγμένες του *Μ*. Επειδή $\frac{(M_2M)}{(M_2M_1)}=\frac{\beta}{\alpha}$, έχουμε $\frac{y}{y_1}=\frac{\beta}{\alpha}$, οπότε

$$y_1=\frac{\alpha}{\beta}y. \qquad (1)$$

Επειδή, επιπλέον η M_1M_2 είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ θα ισχύει

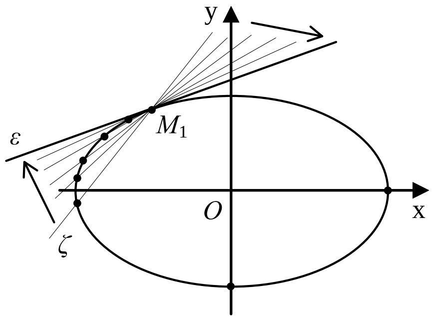
$$x_1 = x. \qquad (2)$$

Όμως, το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=\alpha^2$. Επομένως, ισχύει $x_1^2+y_1^2=\alpha^2$, οπότε, λόγω των σχέσεων (1) και (2), έχουμε

$$x^2+\left(\frac{\alpha}{\beta}y\right)^2=\alpha^2 \Leftrightarrow x^2+\frac{\alpha^2y^2}{\beta^2}=\alpha^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

Άρα, το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Εφαπτομένη Έλλειψης



- Έστω μια έλλειψη C με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

και ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$. Η **εφαπτομένη** της έλλειψης C στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ορίζεται με τρόπο ανάλογο προς εκείνο με τον οποίο ορίστηκε η εφαπτομένη της παραβολής και αποδεικνύεται ότι έχει εξίσωση

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$$

Για παράδειγμα, η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ στο σημείο της $M_1(2,\sqrt{3})$ έχει εξίσωση $\frac{x\cdot 2}{16}+\frac{y\sqrt{3}}{4}=1$, η οποία γράφεται ισοδύναμα $y=-\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

- Αν μια έλλειψη έχει εξίσωση

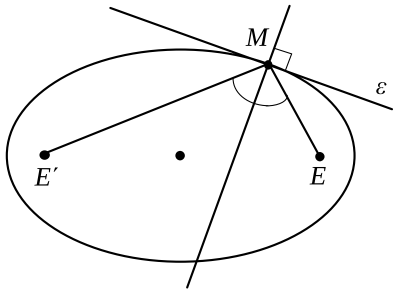
$$\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1,$$

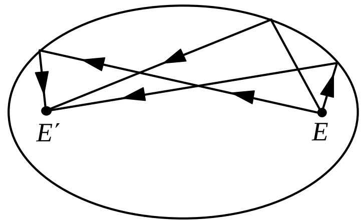
τότε η εφαπτομένη της στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\boldsymbol{\frac{yy_1}{\alpha^2}+\frac{xx_1}{\beta^2}=1}.$$

- Όπως η παραβολή έτσι και η έλλειψη έχει ανάλογη ανακλαστική ιδιότητα. Συγκεκριμένα:

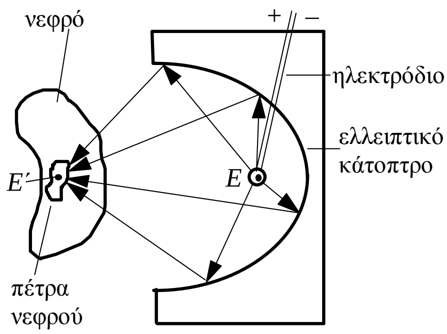
Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου E', E οι εστίες της έλλειψης.





Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή ένα ηχητικό κύμα ή μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινούν από τη μία εστία μιας έλλειψης, ανακλώμενα σε αυτήν, διέρχονται από την άλλη εστία.

Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται στο σχεδιασμό ορισμένων τύπων οπτικών οργάνων και στην κατασκευή των λεγόμενων "στοών με ειδική ακουστική". Οι στοές αυτές είναι αίθουσες με ελλειπτική οροφή, στις οποίες ένα πρόσωπο που ψιθυρίζει στη μια εστία μπορεί να ακουστεί στην άλλη εστία. Ακόμη, η ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης βρίσκει σπουδαία εφαρμογή σε μια ιατρική μέθοδο που λέγεται *λιθοθρυψία*. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται ως εξής: Στη μια εστία της έλλειψης τοποθετείται ένα ηλεκτρόδιο εκπομπής υπερήχων, ενώ ο ασθενής τοποθετείται σε τέτοια θέση, ώστε το νεφρό του να είναι στην άλλη εστία. Τότε οι πέτρες του νεφρού κονιορτοποιούνται από τους ανακλώμενους υπερήχους.



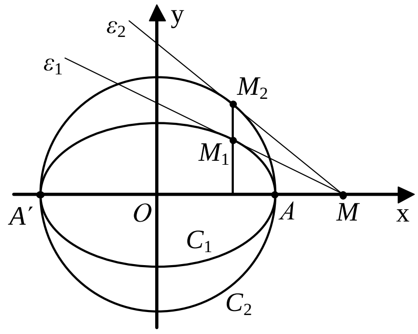
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνονται η έλλειψη $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και ο κύκλος $C_2: x^2+y^2=\alpha^2$. Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της C_1 και $M_2(x_2, y_2)$ το σημείο του C_2 με $x_2=x_1$, να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο M_1 και η εφαπτομένη ε_2 του κύκλου C_2 στο σημείο M_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η εξίσωση της ε_1 είναι

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1 \qquad (1)$$



και της ε_2 είναι

$$xx_1+yy_2=\alpha^2. \qquad (2)$$

Για $y=0$, από την (1) βρίσκουμε $x=\frac{\alpha^2}{x_1}$, ενώ από τη (2) βρίσκουμε $x=\frac{\alpha^2}{x_1}$. Άρα, και η ε_1 και η ε_2 τέμνουν τον $x'x$ στο ίδιο σημείο, το $M\left(\frac{\alpha^2}{x_1},0\right)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με την εφαρμογή αυτή, για να φέρουμε την εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο M_1, φέρνουμε την εφαπτομένη ε_2 του κύκλου C_2 στο σημείο M_2 και στη συνέχεια ενώνουμε το σημείο τομής M των ε_2 και $x'x$ με το σημείο M_1. Η MM_1 είναι η ζητούμενη εφαπτομένη.

2. Έστω C η έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$ και $E(\gamma,0)$ και μεγάλο άξονα 2α. Να αποδειχτεί ότι ο λόγος των αποστάσεων οποιουδήποτε σημείου $M(x,y)$ της έλλειψης από την εστία $E(\gamma,0)$ και την ευθεία $\delta: x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα της έλλειψης. Ομοίως, για την εστία $E'(-\gamma,0)$ και την ευθεία $\delta': x=-\frac{\alpha^2}{\gamma}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή το $M(x,y)$ ανήκει στην έλλειψη C, θα ισχύει

$$(ME')+(ME)=2\alpha. \qquad (1)$$

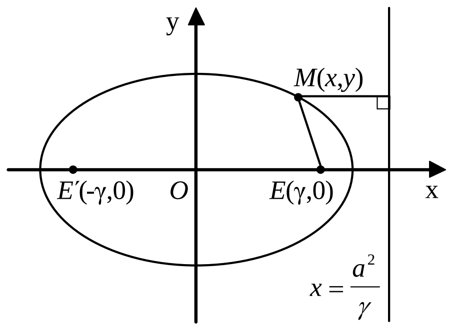
Επομένως, όπως είδαμε στην απόδειξη της εξίσωσης της έλλειψης, θα έχουμε

$$\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=\alpha^2-\gamma x \qquad (2)$$

Η ισότητα αυτή γράφεται διαδοχικά:

$$\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=\alpha-\frac{\gamma}{\alpha}x$$

$$\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=\frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}-x\right). \qquad (3)$$



Όμως,

$$\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=d(M,E) \qquad \text{και} \qquad \frac{\alpha^2}{\gamma}-x=d(M,\delta).$$

Επομένως, η (3) γράφεται

$$d(M,E)=\frac{\gamma}{\alpha}d(M,\delta)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d(M,E)}{d(M,\delta)}=\frac{\gamma}{\alpha}=\varepsilon<1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και μεγάλο άξονα 10

(ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$ και μεγάλο άξονα 26

(iii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-12,0)$ και $E(12,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{12}{13}$

(iv) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(4,\frac{9}{5}\right)$

(v) Όταν έχει εστίες στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(1,1)$ και $M_2\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

2. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:

(i) $x^2+4y^2=4$ (ii) $169x^2+144y^2=24336$.

3. Να εγγράψετε στην έλλειψη $4x^2+y^2=4$ τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες.

4. Αν E', E είναι οι εστίες και $B'B$ ο μικρός άξονας της έλλειψης $x^2+2y^2=4$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBB'E'$ είναι τετράγωνο.

5. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες μιας έλλειψης στα άκρα μιας διαμέτρου της είναι παράλληλες. (*Διάμετρος* μιας έλλειψης λέγεται το τμήμα που συνδέει δύο σημεία της έλλειψης και διέρχεται από την αρχή των αξόνων).

6. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2+y^2=4$, οι οποίες:

(i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y=-3x+1$

(ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$

(iii) διέρχονται από το σημείο $M(0,4)$.

7. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2+4y^2=100$ στα σημεία της $M_1(4\sqrt{5},\sqrt{5})$, $M_2(-4\sqrt{5},\sqrt{5})$, $M_3(-4\sqrt{5},-\sqrt{5})$ και $M_4(4\sqrt{5},-\sqrt{5})$ σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιες τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{\alpha(1-t^2)}{1+t^2},\frac{2\beta t}{1+t^2}\right)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ για όλες τις τιμές του $t\in\mathbf{R}$.

2. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών

$$\alpha y=\lambda\beta(\alpha+x) \quad \text{και} \quad \lambda\alpha y=\beta(\alpha-x), \quad 0<\beta<\alpha.$$

ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ για όλες τις τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}^*$.

3. Αν $M(x,y)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, να αποδείξετε ότι

$$(ME')=\alpha+\varepsilon x \quad \text{και} \quad (ME)=\alpha-\varepsilon x.$$

4. Αν d, d' είναι οι αποστάσεις των σημείων $\Gamma(0,\gamma)$ και $\Gamma'(0,-\gamma)$ από την εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ σε ένα σημείο της $M_1(x_1,y_1)$, να αποδείξετε ότι

$$d^2+d'^2=2\alpha^2.$$

5. Έστω $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ δύο σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και τα σημεία $N_1(\varepsilon x_1,0)$ και $N_2(\varepsilon x_2,0)$. Να αποδείξετε ότι $(M_1N_2)=(M_2N_1)$.

6. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και ένα σημείο της *M*. Έστω επιπλέον, ο κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$ και το σημείο του *N*, που έχει την ίδια τετμημένη με το *M*. Από το *M* φέρνουμε παράλληλη προς την ON, που τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία *Γ* και *Δ* αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $M\Gamma=\beta$ και $M\Delta=\alpha$.

7. Έστω *ε* και ε' οι εφαπτόμενες της έλλειψης $C:\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ 0<\beta<\alpha$ στις κορυφές της $A(\alpha,0)$ και $A'(-\alpha,0)$, αντιστοίχως, και ζ η εφαπτομένη της *C* σε ένα σημείο της $M_1(x_1,y_1)$. Αν η *ζ* τέμνει τις ε και ε' στα σημεία *Γ* και Γ', αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

(i) $(A\Gamma)(A'\Gamma')=\beta^2$

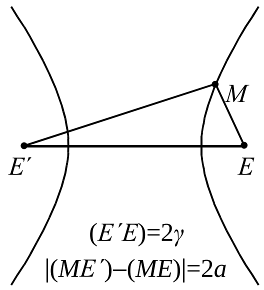
(ii) ο κύκλος με διάμετρο το $\Gamma\Gamma'$ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

8. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και η εφαπτομένη στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$. Αν η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $\Gamma(p,0)$ και $\Delta(0,q)$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2}{p^2}+\frac{\beta^2}{q^2}=1$.

3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Ορισμός Υπερβολής

Έστω E' και *E* δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται **υπερβολή** με εστίες τα σημεία E' και *E* ο γεωμετρικός τόπος *C* των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και *E* είναι *σταθερή* και μικρότερη του $(E'E)$. Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της υπερβολής από τις εστίες την παριστάνουμε συνήθως με 2*α*, ενώ την απόσταση των εστιών με 2*γ*. Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της υπερβολής.

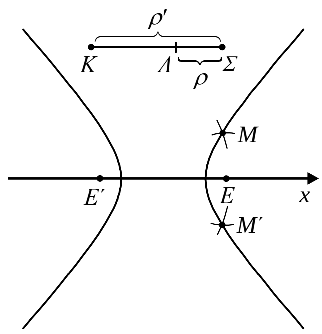


Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό:

α) Ένα σημείο M είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν

$$|(ME')-(ME)|=2\alpha .$$

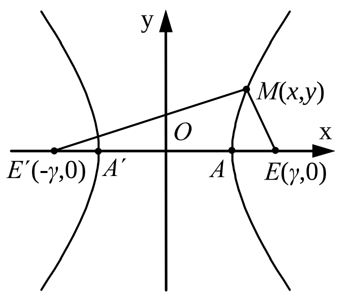
β) Ισχύει $|(ME')-(ME)|<(E'E)$ δηλαδή $2\alpha<2\gamma$, οπότε $\boldsymbol{\alpha<\gamma}$.



Για να βρούμε σημεία της υπερβολής C, εργαζόμαστε ως εξής: Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $ΚΛ$ μήκους 2α και ένα οποιοδήποτε σημείο $Σ$ της ημιευθείας $ΚΛ$ εκτός του ευθύγραμμου τμήματος $ΚΛ$. Με κέντρα E' και E και ακτίνες $\rho'=(ΚΣ)$ και $\rho=(ΛΣ)$, αντιστοίχως, γράφουμε κύκλους οι οποίοι τέμνονται στα σημεία M και M'. Τα σημεία M και M' είναι σημεία της υπερβολής, γιατί ισχύει $(ME')-(ME)$ $=(ΚΣ)-(ΛΣ)=(ΚΛ)=2\alpha$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε οσαδήποτε σημεία της υπερβολής.

Εξίσωση Υπερβολής

- Έστω C μια υπερβολή με εστίες E' και E. Θα βρούμε την εξίσωση της C ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα των x την ευθεία $E'E$ και άξονα των y τη μεσοκάθετη του $E'E$.



Αν $M(x,y)$ είναι ένα σημείο της υπερβολής C, τότε θα ισχύει

$$|(ME')-(ME)|=2\alpha , \qquad (1)$$

Επειδή $(E'E)=2\gamma$, οι εστίες E' και E θα έχουν συντεταγμένες $(-\gamma,0)$ και $(\gamma,0)$ αντιστοίχως. Επομένως,

$$(ME')=\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2} \quad \text{και} \quad (ME)=\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}$$

Έτσι η σχέση (1) γράφεται

$$|\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}-\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}|=2\alpha$$

από την οποία έχουμε διαδοχικά:

$$(x+\gamma)^2+y^2+(x-\gamma)^2+y^2-2\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=4\alpha^2$$

$$\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}=x^2+y^2+\gamma^2-2\alpha^2$$

$$[(x^2+y^2+\gamma^2)+2\gamma x]\cdot[(x^2+y^2+\gamma^2)-2\gamma x]=[(x^2+y^2+\gamma^2)-2\alpha^2]^2$$

$$(x^2+y^2+\gamma^2)^2-4\gamma^2x^2=(x^2+y^2+\gamma)^2+4\alpha^4-4\alpha^2(x^2+y^2+\gamma^2)$$

$$\alpha^2x^2-\gamma^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^4-\alpha^2\gamma^2$$

$$(\alpha^2-\gamma^2)x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2(\alpha^2-\gamma^2)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\gamma^2-\alpha^2}=1. \qquad (1)$$

Επειδή $\gamma>\alpha$, είναι $\gamma^2-\alpha^2>0$, οπότε, αν θέσουμε $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$, η εξίσωση (1) παίρνει τη μορφή

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1. \qquad (2)$$

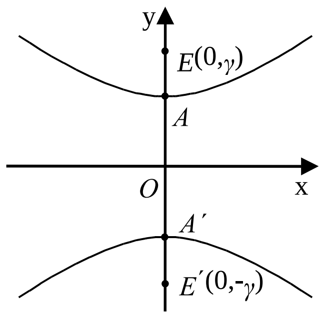
Αποδεικνύεται και το *αντίστροφο*, δηλαδή ότι κάθε σημείο $M(x,y)$ του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση (2) είναι σημείο της υπερβολής *C*. Επομένως, η εξίσωση της υπερβολής *C* με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$, και σταθερή διαφορά 2α είναι

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(-13,0)$ $E(13,0)$ και σταθερή διαφορά $2\alpha=24$ είναι

$$\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{5^2}=1, \quad \text{αφού} \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$$

- Αν τώρα πάρουμε σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα των y την ευθεία $E'E$ και άξονα των x τη μεσοκάθετο του $E'E$ και εργαστούμε όπως πριν, θα βρούμε ότι η εξίσωση της υπερβολής C είναι:



$$\boxed{\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}\,.}$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E'(0,-13)$ $E(0,13)$ και σταθερή διαφορά $2\alpha=24$, είναι

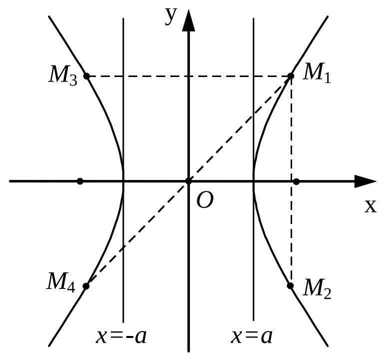
$$\frac{y^2}{12^2}-\frac{x^2}{5^2}=1, \quad \text{αφού} \quad \beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5\,.$$

- Τέλος, αν είναι $\alpha=\beta$, τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής** και η εξίσωσή της γράφεται: $\boldsymbol{x^2-y^2=\alpha^2}$**.**

Ιδιότητες Υπερβολής

Έστω μια υπερβολή C, η οποία ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy έχει εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$.

- Αν $M_1(x_1,y_1)$ είναι ένα σημείο της υπερβολής C, τότε και τα σημεία $M_2(x_1,-y_1)$, $M_3(-x_1,y_1)$ και $M_4(-x_1,-y_1)$ ανήκουν στην C, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αυτό σημαίνει ότι η υπερβολή C έχει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας. Επομένως, η ευθεία που ενώνει τις εστίες E',E της υπερβολής και η μεσοκάθετη του $E'E$ είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής, ενώ το μέσο O του $E'E$ είναι κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο O λέγεται **κέντρο** της υπερβολής.



- Από την εξίσωση της υπερβολής για $y=0$ βρίσκουμε $x=\pm\alpha$. Συνεπώς, η υπερβολή τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha,0)$, και $A(\alpha,0)$. Τα σημεία αυτά λέγονται **κορυφές** της υπερβολής. Από την ίδια εξίσωση για $x=0$ προκύπτει η εξίσωση $y^2=-\beta^2$, η οποία είναι αδύνατη στο **R**. Επομένως, **η υπερβολή *C* δεν τέμνει τον άξονα $y'y$**.

- Τέλος, από την εξίσωση της υπερβολής, έχουμε

$$\frac{x^2}{\alpha^2}=1+\frac{y^2}{\beta^2}\geq 1,$$

οπότε

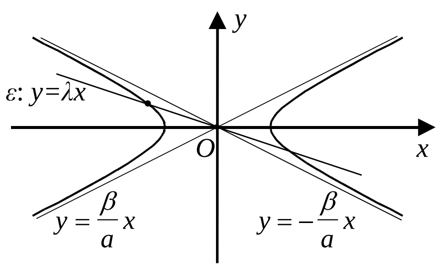
$$x^2-\alpha^2\geq 0$$

και άρα

$$x\leq -\alpha \quad \text{ή} \quad x\geq \alpha .$$

Επομένως, τα σημεία της υπερβολής C βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών $x=-\alpha$ και $x=\alpha$, πράγμα που σημαίνει ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους.

Ασύμπτωτες Υπερβολής



- Έστω μια υπερβολή C με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (1)$$

και μια ευθεία ε με εξίσωση

$$y=\lambda x,$$

δηλαδή μια ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.
Η ευθεία ε έχει με την υπερβολή C κοινά σημεία, αν και μόνο αν το σύστημα

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad \text{και} \quad y=\lambda x \qquad (1)$$

έχει λύση. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (1), λόγω της δεύτερης, γράφεται διαδοχικά

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\lambda^2x^2}{\beta^2}=1$$

$$\beta^2x^2-\lambda^2\alpha^2x^2=\alpha^2\beta^2$$

$$(\beta^2-\lambda^2\alpha^2)x^2=\alpha^2\beta^2 . \qquad (2)$$

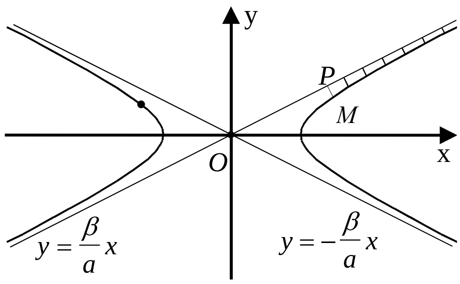
Έτσι το σύστημα (1) έχει λύση, αν και μόνο αν η (2) έχει λύση, δηλαδή αν και μόνο αν $\beta^2-\lambda^2\alpha^2>0$ ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$|\lambda|<\frac{\beta}{\alpha}. \tag{3}$$

Επομένως, η ευθεία $y=\lambda x$ έχει με την υπερβολή κοινά σημεία, και μάλιστα δύο, μόνο όταν $|\lambda|<\frac{\beta}{\alpha}$. Άρα, όλα τα σημεία της υπερβολής C θα περιέχονται στις γωνίες των ευθειών

$$y=-\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad y=\frac{\beta}{\alpha}x,$$

στις οποίες βρίσκεται ο άξονας $x'x$.



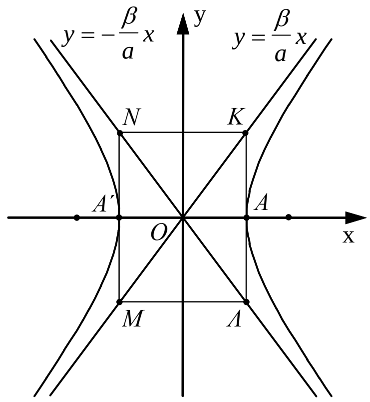
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σημείο $M(x,y)$ της υπερβολής με $x>0$ και $y>0$. Αποδεικνύεται ότι όταν το x *αυξάνει απεριόριστα*, η απόσταση MP του M από την ευθεία $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ *τείνει* προς το μηδέν. Έτσι, το άνω τεταρτημόριο του δεξιού κλάδου της υπερβολής πλησιάζει όλο και περισσότερο την ευθεία $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, χωρίς ποτέ να συμπέσει με αυτή. Γι'αυτό την ευθεία $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ τη λέμε *ασύμπτωτο* του δεξιού κλάδου της υπερβολής. Λόγω συμμετρίας της υπερβολής ως προς τον άξονα $x'x$, ο δεξιός κλάδος της θα έχει ασύμπτωτο και την ευθεία $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$, οπότε, λόγω συμμετρίας της υπερβολής και ως προς τον άξονα $y'y$, ο αριστερός κλάδος της θα έχει ασύμπτωτες τις ίδιες ευθείες. Άρα, οι **ασύμπτωτες** της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες

$$\boxed{y=\frac{\beta}{\alpha}x, \qquad y=-\frac{\beta}{\alpha}x}$$

Είναι φανερό ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιες του ορθογώνιου $K\Lambda MN$ με κορυφές τα σημεία $K(\alpha,\beta)$, $\Lambda(\alpha,-\beta)$, $M(-\alpha,-\beta)$ και $N(-\alpha,\beta)$. Το ορθογώνιο αυτό λέγεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής. Για παράδειγμα, οι ασύμπτωτες της υπερβολής $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ είναι οι ευθείες $y = 2x$ και $y = -2x$.

- Αν η υπερβολή C έχει εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, τότε οι ασύμπτωτες της είναι ευθείες:

$$y = \frac{\alpha}{\beta}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{\alpha}{\beta}x.$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ένας μνημονικός κανόνας για να βρίσκουμε κάθε φορά τις ασύμπτωτες μιας υπερβολής είναι ο εξής:

Παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσης της υπερβολής και εξισώνουμε κάθε παράγοντα με μηδέν. Για παράδειγμα, έστω η υπερβολή $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Επειδή

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = \left(x - \frac{y}{2}\right)\left(x + \frac{y}{2}\right).$$

οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες

$$x - \frac{y}{2} = 0 \quad \text{και} \quad x + \frac{y}{2} = 0,$$

δηλαδή οι

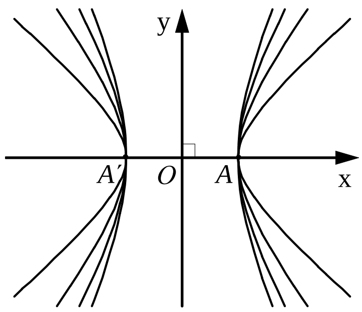
$$y = 2x \quad \text{και} \quad y = -2x.$$

Εκκεντρότητα Υπερβολής

Όπως στην έλλειψη έτσι και στην υπερβολή μία παράμετρος που καθορίζει το σχήμα της είναι η εκκεντρότητα. Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, και τη συμβολίζουμε με **ε**, το λόγο $\boldsymbol{\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} > 1}$. Επειδή $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, είναι $\varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha}$, οπότε $\varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ και άρα,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \tag{1}$$

Επομένως, η εκκεντρότητα ε προσδιορίζει το συντελεστή διεύθυνσης της ασυμπτώτου της, δηλαδή χαρακτηρίζει το ορθογώνιο βάσης, άρα τη μορφή της ίδιας της υπερβολής. Όσο η εκκεντρότητα μικραίνει και τείνει να γίνει ίση με 1, ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$, άρα και το β, μικραίνει και τείνει να γίνει ίσο με 0. Κατά συνέπεια, όσο πιο μικρή είναι η εκκεντρότητα της υπερβολής τόσο πιο επίμηκες είναι το ορθογώνιο βάσης και κατά συνέπεια τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.

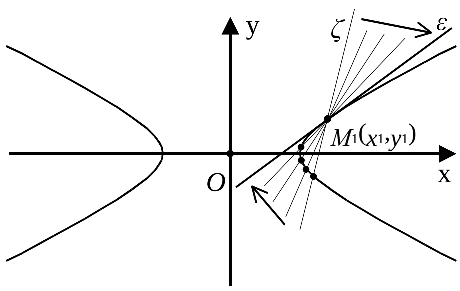


Στην περίπτωση της ισοσκελούς υπερβολής είναι $\alpha=\beta$, οπότε $\varepsilon=\sqrt{2}$.

Εφαπτομένη Υπερβολής

- Έστω μια υπερβολή με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad (1)$$



και ένα σημείο $M_1(x_1,y_1)$ αυτής.

Η **εφαπτομένη** της υπερβολής στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$ ορίζεται με τρόπο ανάλογο προς εκείνο με τον οποίο ορίστηκε η εφαπτομένη της έλλειψης και αποδεικνύεται ότι έχει εξίσωση

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$$

Έτσι, για παράδειγμα, η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ στο σημείο $M_1(4,\sqrt{3})$ έχει εξίσωση $\frac{x4}{4}-y\sqrt{3}=1$, η οποία γράφεται ισοδύναμα $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

- Αν μια υπερβολή έχει εξίσωση

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1,$$

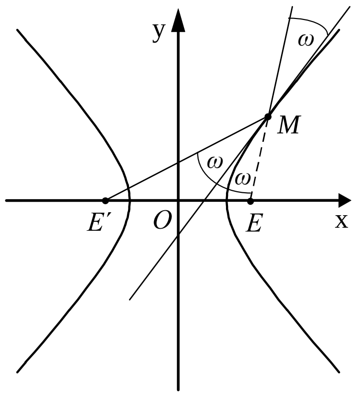
τότε η εφαπτομένη της στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ θα έχει εξίσωση

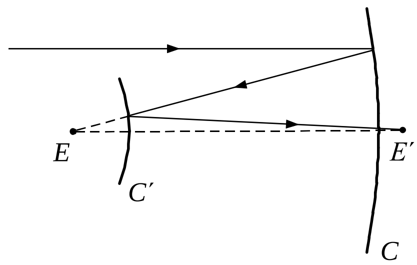
$$\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1.$$

- Όπως η έλλειψη έτσι και η υπερβολή έχει ανάλογη ανακλαστική ιδιότητα.

Συγκεκριμένα:

> Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της M διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου E', E οι εστίες της υπερβολής.





Επομένως, μια φωτεινή ακτίνα, κατευθυνόμενη προς τη μία εστία της υπερβολής, όταν ανακλάται στην επιφάνεια αυτής, διέρχεται από την άλλη εστία, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ιδιότητα αυτή της υπερβολής σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ιδιότητες των άλλων κωνικών τομών βρίσκει εφαρμογή στην κατασκευή των ανακλαστικών τηλεσκοπίων, καθώς και στη ναυσιπλοΐα για τον προσδιορισμό του στίγματος των πλοίων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχτεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων ενός σημείου $M_1(x_1, y_1)$ της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ από τις ασύμπτωτες είναι σταθερό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $M_1(x_1, y_1)$ ένα σημείο της υπερβολής. Τότε θα ισχύει $\frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$ ή, ισοδύναμα,

$$\beta^2 x_1^2 - \alpha^2 y_1^2 = \alpha^2 \beta^2 . \qquad (1)$$

Οι ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 της υπερβολής έχουν εξισώσεις $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$, ή ισοδύναμα

$$\beta x - \alpha y = 0 \quad \text{και} \quad \beta x + \alpha y = 0 \qquad (2)$$

αντιστοίχως. Επομένως, το γινόμενο των αποστάσεων του M_1 από τις ε_1, ε_2 είναι ίσο με

$$\begin{aligned} d(M_1, \varepsilon_1) \cdot d(M_1, \varepsilon_2) &= \frac{|\beta x_1 - \alpha y_1|}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} \cdot \frac{|\beta x_1 + \alpha y_1|}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} \\ &= \frac{|\beta^2 x_1^2 - \alpha^2 y_1^2|}{\beta^2 + \alpha^2} \\ &\overset{(1)}{=} \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \end{aligned}$$

που είναι σταθερό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-13,0)$, $E(13,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(5,0)$ και $A'(-5,0)$

(ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-10)$, $E(0,10)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{3}$

(iii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5},0)$, $E(\sqrt{5},0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(2\sqrt{2},1)$

(iv) Όταν έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{4}{3}x$ και $y=-\frac{4}{3}x$ και διέρχεται από το σημείο $M(3\sqrt{2},4)$.

2. Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής:
(i) $9x^2-16y^2=144$,
(ii) $x^2-y^2=4$,
(iii) $144x^2-25y^2=3600$.

3. Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, της οποίας η ασύμπτωτη $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30^0.

4. Αν η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στην κορυφή $A(\alpha,0)$ τέμνει την ασύμπτωτη $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ στο σημείο Γ, να αποδείξετε ότι $(OE)=(O\Gamma)$.

5. Έστω η υπερβολή $C:\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, ε η εφαπτομένη της σε ένα σημείο $M_1(x_1,y_1)$ και ζ η κάθετη της ε στο M_1. Αν η ε διέρχεται από το σημείο $M_2(0,-\beta)$ και η ζ διέρχεται από το σημείο $M_3(2\alpha\sqrt{2},0)$, να αποδείξετε ότι η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι ίση με $\sqrt{2}$.

6. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία που είναι παράλληλη προς μια από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει την υπερβολή σε ένα μόνο σημείο. Ποιο είναι το σημείο τομής της ευθείας $2x-y=1$ και της υπερβολής $4x^2-y^2=1$;

7. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2-4y^2=12$ οι οποίες:
(i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y=x+1$
(ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y=-\frac{4}{\sqrt{3}}x$
(iii) διέρχονται από το σημείο $M(3,0)$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν E_1 είναι η προβολή της εστίας E της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ πάνω στην ασύμπτωτη $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, να αποδείξετε ότι

(i) $(OE_1)=\alpha$, (ii) $(EE_1)=\beta$.

2. Έστω ε και ε' οι εφαπτόμενες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στις κορυφές της A και A'. Αν Γ και Γ' είναι τα σημεία στα οποία μια τρίτη εφαπτομένη της υπερβολής τέμνει τις ε και ε', αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι

(i) $(A\Gamma)(A'\Gamma')=\beta^2$ και

(iii) ο κύκλος με διάμετρο το $\Gamma\Gamma'$ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής.

3. Έστω $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ δύο σημεία του δεξιού κλάδου της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Αν η ευθεία M_1M_2 τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία $M_3(x_3,y_3)$ και $M_4(x_4,y_4)$, να αποδείξετε ότι $(M_1M_3)=(M_2M_4)$.

4. Από ένα σημείο $M_1(x_1,y_1)$ της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ φέρνουμε παράλληλες προς τις ασύμπτωτες. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου παραλληλόγραμμου είναι σταθερό.

5. Να αποδείξετε ότι το συνημίτονο μιας από τις γωνίες των ασυμπτώτων της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ δίνεται από τον τύπο $\text{συν}\varphi=\frac{2-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$.

6. Έστω οι υπερβολές

$$C_1:\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad \text{και} \quad C_2:\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=\rho^2,\ \rho>1.$$

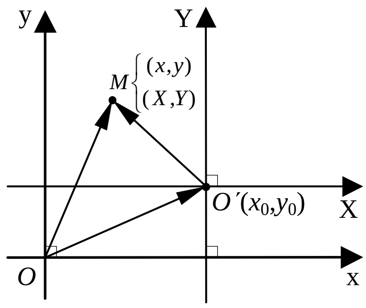
Αν A_1', A_1 και A_2', A_2 είναι οι κορυφές των C_1 και C_2 αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι από το A_2 δεν άγονται εφαπτόμενες στη C_1, ενώ από το A_1 άγονται εφαπτόμενες της C_2.

3.5 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$

Μεταφορά Αξόνων

Η εξίσωση ενός κύκλου με ακτίνα ρ έχει την απλή μορφή $x^2+y^2=\rho^2$, αν η αρχή του συστήματος συντεταγμένων $O(0,0)$ είναι το κέντρο του κύκλου. Αν όμως το κέντρο του κύκλου δεν είναι η αρχή των αξόνων αλλά το σημείο $O'(x_0,y_0)$, τότε η εξίσωσή του έχει την πιο σύνθετη μορφή $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$. Αυτό δείχνει ότι η μορφή της εξίσωσης μιας καμπύλης εξαρτάται από τη σχετική θέση της καμπύλης και των αξόνων.

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα επίπεδο έχουμε μια καμπύλη και την εξίσωσή της ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy. Θα αναζητήσουμε την εξίσωση της ίδιας καμπύλης ως προς ένα "νέο" σύστημα συντεταγμένων, του οποίου η αρχή θα είναι το σημείο $O'(x_0,y_0)$ και οι άξονες $X'OX$ και $Y'OY$ θα είναι παράλληλοι και ομόρροποι προς τους άξονες του "παλιού" συστήματος. Λέμε στην περίπτωση αυτή ότι το σύστημα $O'XY$ έχει προκύψει με **παράλληλη μεταφορά των αξόνων** του συστήματος Oxy.



Έστω λοιπόν x και y οι συντεταγμένες ενός σημείου M ως προς το παλιό σύστημα, και X και Y οι συντεταγμένες του ίδιου σημείου ως προς το νέο σύστημα. Έχουμε

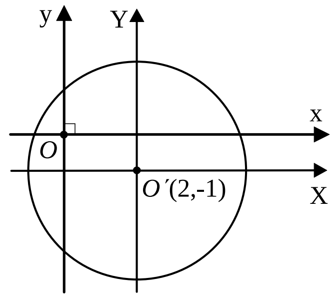
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$$
$$(x,y)=(x_0,y_0)+(X,Y)$$
$$(x,y)=(x_0+X,\ y_0+Y).$$

Επομένως, $x=x_0+X$ και $y=y_0+Y$ ή, ισοδύναμα,

$$\boxed{X=x-x_0,\quad Y=y-y_0}$$

Έτσι για παράδειγμα, αν οι συντεταγμένες ενός σημείου M ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα είναι (4,–3) και η αρχή $O(0,0)$ μετακινηθεί με τη μεταφορά των αξόνων στο σημείο $O'(-1,2)$, τότε οι νέες συντεταγμένες του M είναι $X=4-(-1)=5$ και $Y=-3-2=-5$.

Έστω επίσης η εξίσωση $(x-2)^2+(y+1)^2=9$, που παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2,-1)$ και ακτίνα $\rho=3$. Αν με μια παράλληλη μεταφορά των αξόνων η αρχή $O(0,0)$ μετακινηθεί στο κέντρο του κύκλου, τότε οι καινούριες συντεταγμένες (X,Y) ενός σημείου M του κύκλου είναι $X=x-2$ και $Y=y-(-1)=y+1$. Επομένως η εξίσωση του κύκλου ως προς το νέο σύστημα αξόνων έχει την απλούστερη μορφή $X^2+Y^2=9$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να εξεταστεί τι παριστάνει στο επίπεδο καθεμιά από τις εξισώσεις:

(i) $\boldsymbol{y^2-4y-8x-4=0}$

(ii) $\boldsymbol{9x^2+4y^2-72x-24y+144=0}$

(iii) $\boldsymbol{9x^2-16y^2-36x-96y-252=0}$ **.**

ΛΥΣΗ

(i) Έχουμε διαδοχικά:

$$y^2-4y-8x-4=0 \qquad (1)$$

$$y^2-4y=8x+4$$

$$y^2-2\cdot 2y+2^2=8x+4+2^2$$

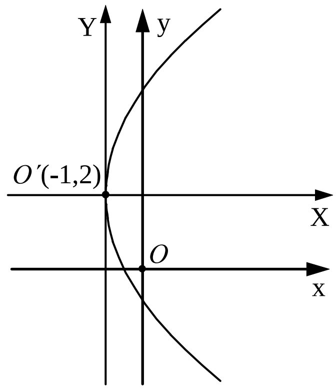
$$(y-2)^2=8(x+1)$$

$$(y-2)^2=2\cdot 4(x+1)\,.$$

Αν θέσουμε $x+1=X$ και $y-2=Y$, δηλαδή αν κάνουμε παράλληλη μεταφορά των αξόνων και τοποθετήσουμε τη νέα αρχή στο σημείο $O'(-1,2)$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$Y^2=2\cdot 4X\,.$$

Επομένως, η εξίσωση (1) παριστάνει παραβολή με κορυφή το σημείο $O'(-1,2)$ και άξονα την ευθεία $Y=0$, δηλαδή την ευθεία $y=2$.



(ii) Έχουμε διαδοχικά

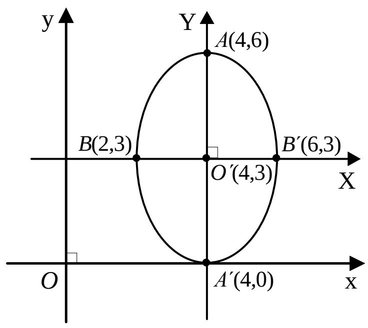
$$9x^2+4y^2-72x-24y+144=0 \qquad (1)$$

$$9(x^2-8x)+4(y^2-6y)=-144$$

$$9(x^2-2\cdot4\cdot x+4^2)+4(y^2-2\cdot3\cdot y+3^2)=9\cdot4^2+4\cdot3^2-144$$
$$9(x-4)^2+4(y-3)^2=36$$
$$\frac{(x-4)^2}{2^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1.$$

Αν θέσουμε $x-4=X$ και $y-3=Y$, δηλαδή αν κάνουμε παράλληλη μεταφορά των αξόνων και τοποθετήσουμε τη νέα αρχή στο σημείο $O'(4,3)$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{X^2}{2^2}+\frac{Y^2}{3^2}=1$$



Επομένως, η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη με κέντρο το σημείο $O'(4,3)$ και με $\alpha=3$, $\beta=2$ και $\gamma=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$. Τα άκρα του μεγάλου άξονα ως προς το νέο σύστημα είναι τα σημεία $(X,Y)=(0,3)$ και $(X,Y)=(0,-3)$, οπότε, λόγω των σχέσεων $x-4=X$ και $y-3=Y$, ως προς το αρχικό σύστημα, είναι τα σημεία $A(4,6)$ και $A'(4,0)$. Ανάλογα βρίσκουμε ότι τα άκρα του μικρού άξονα είναι τα σημεία $B(2,3)$ και $B'(6,3)$. Επίσης, οι εστίες είναι τα σημεία $E(4,3\sqrt{5})$, $E'(4,-3\sqrt{5})$.

(iii) Έχουμε διαδοχικά

$$9x^2-16y^2-36x-96y-252=0 \qquad (1)$$
$$9(x^2-4x)-16(y^2+6y)=252$$
$$9(x-2)^2-16(y+3)^2=144$$
$$\frac{(x-2)^2}{4^2}-\frac{(y+3)^2}{3^2}=1.$$

Αν θέσουμε $x-2=X$ και $y+3=Y$, δηλαδή αν κάνουμε παράλληλη μεταφορά των αξόνων και τοποθετήσουμε τη νέα αρχή στο σημείο $O'(2,-3)$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{X^2}{4^2}-\frac{Y^2}{3^2}=1.$$

Επομένως, η εξίσωση (1) παριστάνει υπερβολή με κέντρο το σημείο $O'(2,-3)$. Με ανάλογο τρόπο, όπως στην περίπτωση (ii), βρίσκουμε ότι η υπερβολή αυτή έχει

$$\alpha=4 \quad , \quad \beta=3 \quad , \quad \gamma=5$$

Άρα, η υπερβολή έχει κορυφές τα σημεία $A(6,-3)$ και $A'(-2,-3)$ και εστίες $E(7,-3)$ και $E'(-3,-3)$.

Γενικά, με κατάλληλη μεταφορά αξόνων, μπορούμε να διαπιστώσουμε αν μια εξίσωση της μορφής $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$ παριστάνει κωνική τομή και να βρούμε το είδος και τα στοιχεία της.

Σχετική Θέση Ευθείας και Κωνικής

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία $y=\lambda x+\beta$ και μία κωνική τομή $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$. Η ευθεία ε και η κωνική C έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία, αφού το σύστημα

$$\begin{cases} y=\lambda x+\beta & (1) \\ Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0 & (2) \end{cases}$$

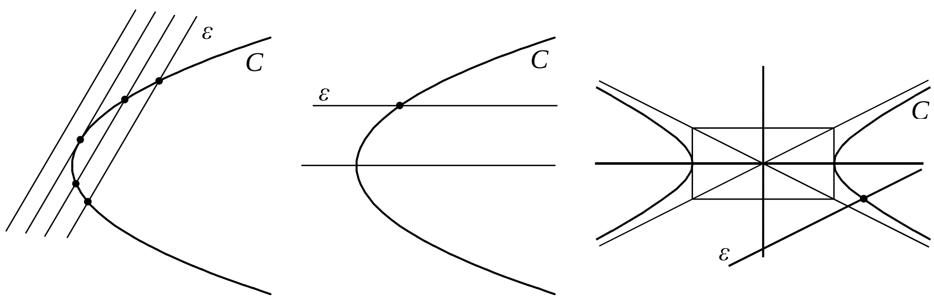
έχει το πολύ δύο διακεκριμένες λύσεις.

Για την επίλυση του συστήματος θέτουμε στη (2), όπου $y=\lambda x+\beta$, οπότε προκύπτει μια δευτεροβάθμια εξίσωση.

— Αν η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες άνισες ή μια απλή ρίζα (όταν είναι 1ου βαθμού), τότε η ευθεία και η κωνική τέμνονται.

— Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή αν είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=0$, τότε αποδεικνύεται ότι η ευθεία εφάπτεται της κωνικής.

—Τέλος, αν η εξίσωση δεν έχει ρίζες, τότε η ευθεία και η κωνική δεν έχουν κοινά σημεία.



Για παράδειγμα, έστω η ευθεία $y=2x$ και η παραβολή $y=x^2+1$. Αν στην εξίσωση της παραβολής θέσουμε όπου $y=2x$, βρίσκουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2-2x+1=0$, η οποία έχει τη διπλή ρίζα $x=1$. Άρα, η ευθεία εφάπτεται της κωνικής και το σημείο επαφής είναι το $M(1,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει παραβολή, για την οποία να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής και της εστίας:

(i) $y^2-8x+8=0$ (ii) $x^2+4x-16y+4=0$

(iii) $y^2+4y+8x-28=0$ (iv) $x^2-8x+6y-8=0$.

2. Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει έλλειψη, για την οποία να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου, των κορυφών και των εστιών.

(i) $9x^2+25y^2-36x-189=0$ (ii) $x^2+4x+16y^2=0$

(iii) $4x^2+9y^2-32x-36y+64=0$ (iv) $9x^2+16y^2+54x-32y-47=0$.

3. Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει υπερβολή, για την οποία να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου, των κορυφών και των εστιών:

(i) $21x^2-4y^2+84x-32y-64=0$ (ii) $2y^2-3x^2-8y+6x-1=0$.

4. Να βρεθεί η τιμή του $\kappa\in\mathbf{R}$, για την οποία η παραβολή $y=x^2-\kappa x+2$ εφάπτεται της ευθείας $y=x-2$.

5. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες του κύκλου $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ και της παραβολής $y^2=4x$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-2\lambda x-1=0 \qquad (1), \qquad \text{όπου} \qquad \lambda\in\mathbf{R}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου ζητείται να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

(ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποιά είναι η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων;

2. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2=1$ και $C_2: (x-2)^2+y^2=2^2$ και η ευθεία $y=\lambda x+\beta$, όπου $\lambda,\beta\in\mathbf{R}$.

(i) Ποιες είναι οι αποστάσεις των κέντρων των κύκλων C_1 και C_2 από την ευθεία;

(ii) Για ποιες τιμές των λ και β η ευθεία εφάπτεται και στους δύο κύκλους;

(iii) Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$ και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60^0.

3. Μια ευθεία $y=\lambda x+\beta$, με $\lambda\neq 0$, τέμνει την παραβολή $y^2=4x$ σε δύο σημεία A και B.

(i) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB είναι $\left(\dfrac{2-\lambda\beta}{\lambda^2},\dfrac{2}{\lambda}\right)$.

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκεται το M, όταν

(α) $\lambda=1$ και το β μεταβάλλεται

(β) $\beta=0$ και το λ μεταβάλλεται.

4. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$, με $\alpha>\beta>0$ και το σημείο $\Sigma(0,2\beta)$. Μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σημείο Σ και τέμνει τις εφαπτόμενες, στα άκρα του μεγάλου άξονα της έλλειψης, στα σημεία M και M'.

(i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο MM' συναρτήσει του λ.

(ii) Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}$ ο κύκλος αυτός διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης;

5. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία $y=x+1$.

6. Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA_1}=(4,0)$ και $\overrightarrow{OA_2}=(1,0)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Αν τα διανύσματα αρχίσουν, συγχρόνως, να περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα αλλά με αντίθετη φορά, να αποδείξετε ότι το πέρας M της συνισταμένης τους διαγράφει έλλειψη.

7. Δίνονται οι ημιευθείες $\delta_1: y=2x$ και $\delta_2: y=-2x$, $x\in(0,+\infty)$ και μια ευθεία ε η οποία τις τέμνει στα σημεία M_1 και M_2 αντιστοίχως.

(i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των M_1 και M_2 συναρτήσει των συντεταγμένων του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2.

(ii) Να αποδείξετε ότι όταν η ευθεία ε κινείται, έτσι ώστε το τρίγωνο OM_1M_2 να έχει σταθερό εμβαδόν και ίσο με 2, τότε το M κινείται στον ένα κλάδο μίας σταθερής υπερβολής.

8. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $C_2: \alpha^2 x^2+\beta^2 y^2=1$ με $0<\beta<\alpha$. Η ημιευθεία $y=(\varepsilon\varphi\theta)x,\ \ x>0$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ τέμνει την C_1 στο σημείο $\Gamma_1(x_1, y_1)$ και την C_2 στο σημείο $\Gamma_2(x_2, y_2)$.
Αν λ_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_1 στο σημείο Γ_1 και λ_2 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_2 στο σημείο Γ_2, να αποδείξετε ότι το γινόμενο $\lambda_1\lambda_2$ είναι ίσο με $(\varepsilon\varphi\theta)^{-2}$.

9. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

(i) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο που η διχοτόμος του πρώτου τεταρτημόριου τέμνει την έλλειψη έχει κλίση $-\frac{1}{2}$. Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

(ii) Έστω *Μ* το σημείο του πρώτου τεταρτημόριου στο οποίο η ευθεία $y=\lambda x$, $\lambda>0$ τέμνει την παραπάνω έλλειψη. Αν μ είναι η κλίση της εφαπτόμενης της έλλειψης στο σημείο *Μ*, τότε να εκφράσετε το γινόμενο $\lambda\mu$ ως συνάρτηση των ημιαξόνων *α*, *β*.

10. (i) Δίνονται ένας κύκλος C_1 με κέντρο *Κ* και ακτίνα *R* και μια ευθεία *ε* που δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο C_1. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων *C*, που εφάπτονται της *ε* και του κύκλου C_1 εξωτερικά, ανήκουν σε σταθερή παραβολή.

(ii) Δίνονται δύο κύκλοι C_1 και C_2, με κέντρα K_1 και K_2 και ακτίνες R_1 και R_2 αντιστοίχως, από τους οποίους ο C_2 είναι εσωτερικός του C_1. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων *C*, που εφάπτονται εσωτερικά του C_1 και εξωτερικά του C_2, ανήκουν σε σταθερή έλλειψη.

(iii) Δίνονται δύο κύκλοι C_1 και C_2, με κέντρα K_1 και K_2 και ακτίνες R_1 και R_2, αντιστοίχως, που βρίσκονται ο ένας εκτός του άλλου. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα του κύκλου *C* που εφάπτονται εξωτερικά και των δύο κύκλων C_1 και C_2 ανήκουν σε κλάδο σταθερής υπερβολής.

11. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και το σημείο της $M(\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi, \beta\eta\mu\varphi)$.

(i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο *Μ*.

(ii) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών *Ε* και E' από την εφαπτομένη είναι σταθερό.

(iii) Για ποια τιμή του φ το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει η εφαπτομένη με τους άξονες γίνεται ελάχιστο;

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Στις παρακάτω ερωτήσεις 1-11 να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

1. Ο κύκλος $(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2$

Α) εφάπτεται στον $x'x$
Β) διέρχεται από το σημείο $A(0,\alpha)$
Γ) εφάπτεται στον $y'y$.

2. Η ευθεία $y=x+1$ και ο κύκλος $x^2+y^2=1$

Α) τέμνονται
Β) εφάπτονται
Γ) δεν έχουν κοινά σημεία.

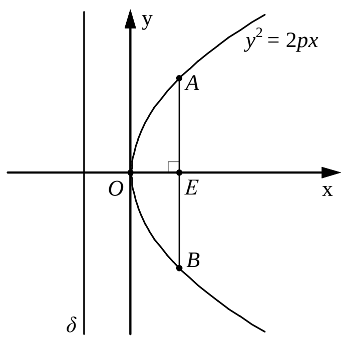
3. Έστω οι κύκλοι $x^2+(y-2)^2=4$ και $(x-2)^2+y^2=4$. Το σημείο $M(1,1)$ είναι
Α) εσωτερικό του ενός κύκλου και εξωτερικό του άλλου
Β) σημείο και των δύο κύκλων
Γ) εσωτερικό και των δύο κύκλων
Δ) εξωτερικό και των δύο κύκλων.

4. Έστω ο κύκλος με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x=2\text{συν}\varphi, \qquad y=2\text{ημ}\varphi, \qquad \text{όπου} \quad \varphi\in[0,2\pi).$$

Το σημείο $A(1,\sqrt{3})$ είναι
Α) εσωτερικό του κύκλου
Β) εξωτερικό του κύκλου
Γ) σημείο του κύκλου.

5. Στο διπλανό σχήμα η δ είναι η διευθετούσα και το E είναι η εστία της παραβολής $y^2=2px$. Το μήκος της χορδής AB είναι ίσο με:



Α) $AB=\dfrac{p}{2}$, Β) $AB=p$, Γ) $AB=2p$,
Δ) $AB=4p$.

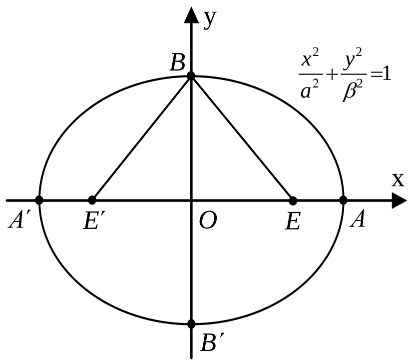
6. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία E',E είναι οι εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Το μήκος του *ΒΕ* είναι

Α) μεγαλύτερο του *α*,

Β) μικρότερο του *α*,

Γ) ίσο με *α*.



7. Στο ίδιο σχήμα αν το τρίγωνο BEE' είναι ισόπλευρο, τότε η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ίση με

Α) $\varepsilon=\frac{1}{2}$, Β) $\varepsilon=2$, Γ) $\varepsilon=1$, Δ) $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Αν οι ελλείψεις $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$, $\alpha>2$ είναι όμοιες, τότε

Α) $\alpha=6$, Β) $\alpha=12$, Γ) $\alpha=3$, Δ) $\alpha=2$.

9. Δίνεται η έλλειψη με παραμετρικές εξισώσεις

$$x=5\text{συν}\varphi \quad \text{και} \quad y=4\text{ημ}\varphi, \quad \varphi\in[0,2\pi).$$

Το σημείο *Μ*(7,0) είναι

Α) εσωτερικό της έλλειψης, Β) εξωτερικό της έλλειψης,

Γ) σημείο της έλλειψης.

10. Οι υπερβολές $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ και $\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{4^2}=1$ έχουν

Α) ίδιες ασύμπτωτες και ίδια εκκεντρότητα,

Β) διαφορετικές ασύμπτωτες και ίδια εκκεντρότητα,

Γ) ίδιες ασύμπτωτες και διαφορετική εκκεντρότητα,

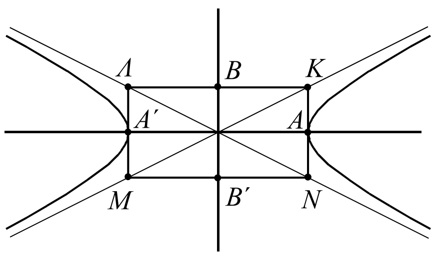
Δ) διαφορετικές ασύμπτωτες και διαφορετικές εκκεντρότητες.

11. Στο διπλανό σχήμα το *ΚΛΜΝ* είναι το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Το μήκος *ΟΚ* είναι

Α) μεγαλύτερο του *γ*

Β) ίσο με *γ*

Γ) μικρότερο του *γ*.



12. Έστω ο κύκλος $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$, $\alpha,\beta,\rho>0$. Να συνδέσετε με μια γραμμή τα δεδομένα της πρώτης στήλης με τα αντίστοιχά τους στη δεύτερη στήλη

Ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων	$\alpha=\beta=\rho$
Ο κύκλος έχει το κέντρο του στον άξονα $x'x$	$\alpha=0$
Ο κύκλος έχει το κέντρο του στον άξονα $y'y$	$\alpha^2+\beta^2=\rho^2$
Ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα $x'x$	$\beta=0$
Ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα $y'y$	$\alpha=\beta\neq\rho$
Ο κύκλος εφάπτεται και στους δύο άξονες.	$\rho=\alpha$
	$\rho=\beta$
	$\alpha=\beta=0$

13. Να συνδέσετε με μια γραμμή τα δεδομένα της πρώτης στήλης με τα αντίστοιχά τους στη δεύτερη στήλη

Εξίσωση	Κωνική
$9x^2-y^2=0$	Έλλειψη
$x^2+y^2-4x+2y-6=0$	Υπερβολή
$y^2-2x-2y+1=0$	Παραβολή
$4x^2+y^2-8x+2y+4=0$	Ζεύγος Ευθειών
$x^2-y^2+2x-4y-4=0$	Κύκλος

14. Να συνδέσετε με μια γραμμή τα δεδομένα της πρώτης στήλης με τα αντίστοιχά τους στη δεύτερη στήλη

Εκκεντρότητα	Κωνική
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	Κύκλος
0	Ισοσκελής υπερβολή
$\frac{4}{5}$	Υπερβολή
$\frac{5}{4}$	Έλλειψη
$\sqrt{2}$	

4 *ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ*

4.1 *Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ*

Εισαγωγή

Η Θεωρία Αριθμών, δηλαδή η μελέτη των ιδιοτήτων των θετικών ακεραίων, έθεσε από πολύ νωρίς τους μαθηματικούς μπροστά στο εξής πρόβλημα:
"Κάποια πρόταση αληθεύει για ορισμένες περιπτώσεις ακεραίων. Είναι όμως αδύνατο να εξεταστούν όλες οι ειδικές περιπτώσεις. Πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι αληθεύει γενικά;"
Μια από τις πλέον ισχυρές μεθόδους για τη λύση αυτού του προβλήματος είναι η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής. Ο (ελληνικής καταγωγής) Ιταλός μαθηματικός Francesco Mauroliko (Μαυρόλυκος) απέδειξε το 1557 ότι:

> "*Το άθροισμα ενός πλήθους περιττών σε διαδοχική σειρά, με αφετηρία τη μονάδα, δίνει το τετράγωνο του πλήθους των περιττών.*"
>
> [δηλαδή, με σύγχρονο συμβολισμό, $1+3+5+...+(2\nu-1)=\nu^2$].

Για την απόδειξη ο Μαυρόλυκος χρησιμοποίησε την πρόταση

> "*Κάθε τετράγωνο, όταν αυξάνεται με τον επόμενό του στην τάξη περιττό, δίνει το επόμενο στην τάξη τετράγωνο*".
>
> [δηλαδή την ταυτότητα $\nu^2+(2\nu+1)=(\nu+1)^2$].

Ουσιαστικά έδειξε λοιπόν ότι υπάρχει ένας γενικός τρόπος μετάβασης από μια περίπτωση στην αμέσως επόμενη. Η μέθοδος αυτή διατυπώθηκε με σαφήνεια από τον Blaise Pascal, το 1654, στην πραγματεία του για το αριθμητικό τρίγωνο. Διατυπώνοντας μια ιδιότητα που ισχύει σε όλες τις γραμμές του τριγώνου, ο Pascal έγραψε τα εξής:

> "*Αν η πρόταση αυτή έχει έναν άπειρο αριθμό περιπτώσεων, θα δώσω μια πολύ σύντομη απόδειξη υποθέτοντας δύο λήμματα.*
> *Το πρώτο, που είναι προφανές, είναι ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή.*
> *Το δεύτερο είναι ότι αν αυτή η ιδιότητα ισχύει σε μια τυχαία γραμμή, τότε θα ισχύει απαραίτητα και στην επόμενη γραμμή.*
> *Από αυτό γίνεται φανερό ότι η πρόταση αληθεύει σε κάθε περίπτωση, γιατί η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή, λόγω του πρώτου λήμματος· Ετ-*

σι λόγω του δευτέρου λήμματος θα ισχύει και στην 3η γραμμή, άρα και στην 4η κ.ο.κ., μέχρι το άπειρο."

Οι όροι "μαθηματική επαγωγή" ή "τέλεια επαγωγή", καθιερώθηκαν στη διάρκεια του 19ου αιώνα με τις εργασίες των A. de Morgan (1838) και R. Dedekind (1887), για να γίνει διάκριση από την "ατελή επαγωγή" που χρησιμοποιείται στις Φυσικές Επιστήμες.

Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το άθροισμα

$$1+3+5+7+...+(2\nu-1)$$

για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο ν.
Υπολογίζουμε το άθροισμα αυτό για μερικές τιμές του ν και έχουμε:

Για $\nu=1$,	$1=1$	$(=1^2)$
Για $\nu=2$,	$1+3=4$	$(=2^2)$
Για $\nu=3$,	$1+3+5=9$	$(=3^2)$
Για $\nu=4$,	$1+3+5+7=16$	$(=4^2)$

Τα μέχρι τώρα αποτελέσματα μας οδηγούν στην εικασία ότι:

$$1+3+5+7+...+(2\nu-1)=\nu^2 . \quad (1)$$

Επειδή το πλήθος των θετικών ακεραίων είναι άπειρο, συνεχίζοντας με τον παραπάνω τρόπο, είναι αδύνατο να αποδείξουμε ότι η (1) ισχύει για όλους τους θετικούς ακεραίους.
Αν όμως μπορούσαμε να δείξουμε ότι όταν αληθεύει ο ισχυρισμός (1) για αυθαίρετο θετικό ακέραιο ν θα αληθεύει και για τον επόμενό του $\nu+1$, τότε ο ισχυρισμός θα ίσχυε για όλους τους θετικούς ακεραίους. Γιατί τότε, αφού ο ισχυρισμός είναι αληθής για $\nu=1$, θα είναι αληθής και για $\nu=1+1=2$, συνεπώς και για $\nu=2+1=3$ και διαδοχικά για κάθε θετικό ακέραιο.

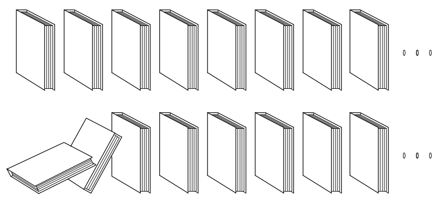
Αν, λοιπόν, υποθέσουμε ότι

$$1+3+5+7+...+(2\nu-1)=\nu^2 ,$$

τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 1+3+5+7+...+(2\nu-1)+(2\nu+1) &= [1+3+5+7+...+(2\nu-1)]+(2\nu+1) \\ &= \nu^2+2\nu+1 \\ &= (\nu+1)^2 . \end{aligned}$$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για έναν αυθαίρετο θετικό ακέραιο ν, τότε είναι αληθής και για τον επόμενό του ακέραιο $\nu+1$. Άρα, αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο ν.
Μια αναπαράσταση του γεγονότος αυτού είναι η εξής:
Υποθέτουμε ότι έχουμε τοποθετήσει σε μια σειρά ένα πλήθος βιβλίων.



Αν ρίξουμε προς τα πίσω το πρώτο βιβλίο και αν τα βιβλία είναι έτσι τοποθετημένα ώστε κάθε φορά που πέφτει κάποιο βιβλίο να ρίχνει και το επόμενό του, τότε θα ανατραπούν όλα τα βιβλία.
Η αποδεικτική αυτή μέθοδος λέγεται **μαθηματική ή τέλεια επαγωγή** και στηρίζεται στη λεγόμενη "αρχή της μαθηματικής επαγωγής", η οποία διατυπώνεται ως εξής:

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Έστω $P(\nu)$ ένας ισχυρισμός που αναφέρεται στους θετικούς ακεραίους.
Αν
(i) ο ισχυρισμός είναι αληθής για τον ακέραιο 1, δηλαδή ο $P(1)$ είναι αληθής, και
(ii) η αλήθεια του $P(\nu)$ συνεπάγεται την αλήθεια του $P(\nu+1)$ για κάθε ν
τότε ο ισχυρισμός $P(\nu)$ αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν.

Όπως φαίνεται από τα προηγούμενα, η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής αποτελείται από δύο βήματα. Και τα δύο βήματα είναι απολύτως αναγκαία, για να εξασφαλίσουμε την αλήθεια ενός ισχυρισμού, διότι διαφορετικά μπορεί να οδηγηθούμε σε λάθος συμπεράσματα. Υπάρχουν, δηλαδή, περιπτώσεις στις οποίες ικανοποιείται το 1ο βήμα χωρίς όμως να ικανοποιείται και το 2ο. Για παράδειγμα, το πολυώνυμο $\nu^2-\nu+41$ για $\nu=2$ έχει την τιμή 41, που είναι πρώτος αριθμός, (δηλαδή δεν έχει άλλο διαιρέτη εκτός της μονάδας και του εαυτού του). Αλλά και για $\nu=2,3,4,5,6,7,8,9,10$ έχουμε τις τιμές $43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131$ αντιστοίχως, που είναι όλοι επίσης πρώτοι αριθμοί. Θα μπορούσε λοιπόν κάποιος να υποθέσει ότι για οποιοδήποτε φυσικό ν η τιμή του πολυώνυμου $\nu^2-\nu+41$ είναι πρώτος αριθμός. Αυτό όμως, ενώ ισχύει μέχρι και $\nu=40$, δεν ισχύει για $\nu=41$, για το οποίο έχουμε $41^2-41+41=41^2$, που δεν είναι πρώτος.

Υπάρχουν επίσης περιπτώσεις στις οποίες ικανοποιείται το 2ο βήμα της μαθηματικής επαγωγής χωρίς όμως να ικανοποιείται και το 1ο. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τον ισχυρισμό:

"Κάθε φυσικός της μορφής 2ν είναι περιττός".

Αν και ο ισχυρισμός είναι προφανώς ψευδής, ωστόσο ισχύει το 2ο βήμα της μαθηματικής επαγωγής. Πράγματι, αν ο αριθμός 2ν με ν φυσικό είναι περιττός, τότε $2(\nu+1)=2\nu+2$ είναι επίσης περιττός, ως άθροισμα του περιττού 2ν με τον άρτιο 2.

Πολλές φορές πρέπει να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός $P(\nu)$ αληθεύει όχι για κάθε θετικό ακέραιο ν αλλά για κάθε ν μεγαλύτερο ή ίσο από κάποιο ορισμένο φυσικό αριθμό.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να δείξουμε ότι $2^\nu > 2\nu+1$ για κάθε $\nu \geq 3$, τότε το πρώτο βήμα είναι να αποδείξουμε την αλήθεια της ανισότητας για $\nu=3$, ενώ αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι $3^\nu \geq 2\nu+1$ για κάθε $\nu \geq 0$, τότε το πρώτο βήμα είναι να αποδείξουμε την αλήθεια της ανισότητας για $\nu=0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι $1+2+3+\ldots+\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $P(\nu)$ η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για $\nu=1$ η ισότητα γίνεται $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$ ή ισοδύναμα $1=1$, δηλαδή η $P(1)$ είναι αληθής.
- Θα αποδείξουμε ότι αν $P(\nu)$ αληθής, τότε και $P(\nu+1)$ αληθής, δηλαδή ότι:

$$\text{αν } 1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2},\ \text{τότε } 1+2+3+\ldots+\nu+(\nu+1)=\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\ldots+\nu+(\nu+1) &= (1+2+3+\ldots+\nu)+(\nu+1) \\ &= \frac{\nu(\nu+1)}{2}+(\nu+1)=(\nu+1)\left(\frac{\nu}{2}+1\right) \\ &= \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}. \end{aligned}$$

Άρα, η ισότητα αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν.

2. Να αποδειχτεί ότι για όλους τους θετικούς ακεραίους ν με $\nu \geq 2$ και για όλους τους πραγματικούς α με $\alpha \neq 0$ και $\alpha > -1$ ισχύει: $(1+\alpha)^\nu > 1+\nu\alpha$.

(Ανισότητα του Bernoulli)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $P(\nu)$ η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για $\nu = 2$ η ανισότητα γίνεται: $(1+a)^2 > 1+2a$, δηλαδή $1+2a+a^2 > 1+2a$ που είναι αληθής, αφού για $a \neq 0$ ισχύει $a^2 > 0$. Ώστε $P(2)$ αληθής.
- Θα αποδείξουμε ότι αν $P(\nu)$ αληθής, τότε και $P(\nu+1)$ αληθής, δηλαδή:

$$\text{αν} \quad (1+a)^\nu > 1+\nu a , \quad \text{τότε} \quad (1+a)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)a .$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$(1+a)^\nu > 1+\nu a$$

$$(1+a)^\nu(1+a) > (1+\nu a)(1+a) , \qquad \text{αφού} \quad 1+a>0$$

$$(1+a)^{\nu+1} > 1+a+\nu a+\nu a^2$$

$$(1+a)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)a+\nu a^2$$

$$(1+a)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)a , \qquad \text{αφού} \quad \nu a^2 > 0 .$$

Επομένως, η ανισότητα του Bernoulli ισχύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν με $\nu \geq 2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει

(i) $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2 = \dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$

(ii) $1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3 = \left(\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$

(iii) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+\nu(\nu+1) = \dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$

(iv) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = \dfrac{\nu}{\nu+1}$.

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει

$$1+x+x^2+\ldots+x^{\nu-1}=\frac{x^\nu-1}{x-1}, \qquad \text{εφόσον} \quad x\neq 1.$$

3. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\nu^2>2\nu+1$ για κάθε ακέραιο $\nu\geq 3$

(ii) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^\nu>\nu$ για κάθε ακέραιο $\nu\geq 7$

(iii) $5^\nu>5\nu-1$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

B΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $\nu\geq 4$ ισχύει

$$\nu!>2^\nu, \qquad \text{όπου} \quad \nu!=1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu.$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2}\leq 2-\frac{1}{\nu}.$$

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $\nu\geq 3$ ισχύει

$$\nu^{\nu+1}>(\nu+1)^\nu.$$

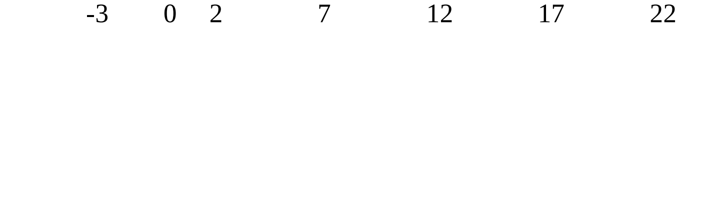
4.2 *ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ*

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του 22 με τον 5. Σύμφωνα με το γνωστό αλγόριθμο της διαίρεσης, το πηλίκο θα είναι ένας ακέραιος κ, τέτοιος, ώστε:

$$0\leq 22-\kappa\cdot 5<5.$$

Για να βρούμε, λοιπόν, το κ, σχηματίζουμε τις διαφορές:

$$22\text{-}5, \quad 22\text{-}2\cdot 5, \quad 22\text{-}3\cdot 5, \quad 22\text{-}4\cdot 5, \quad 22\text{-}5\cdot 5, \quad 22\text{-}6\cdot 5 \quad \text{κτλ.}$$



Παρατηρούμε ότι αφού οι αριθμοί αυτοί συνεχώς μειώνονται, από ένα σημείο και μετά θα είναι όλοι αρνητικοί. Ο μικρότερος μη αρνητικός ακέραιος από τους παραπάνω αριθμούς, ο οποίος είναι μικρότερος του 5, είναι ο $22-4\cdot5=2$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το πηλίκο της διαίρεσης του 22 με τον 5 είναι 4 και το υπόλοιπο 2 και έχουμε:

$$22=4\cdot5+2,\ 0\le 2<5.$$

Γενικά, ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί με $\beta\neq0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί κ και υ, τέτοιοι, ώστε

$$\alpha=\kappa\beta+\upsilon,\quad 0\le\upsilon<\beta.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Θεωρούμε τους ακέραιους $\alpha,\alpha-\beta,\alpha-2\beta,\alpha-3\beta,...$ και από αυτούς παίρνουμε τους μη αρνητικούς. Σχηματίζουμε δηλαδή το σύνολο

$$S=\{\alpha-x\beta|x\in\mathbf{N},\alpha-x\beta\ge0\}$$

Το σύνολο αυτό είναι υποσύνολο του $\mathbf{N}$ και επιπλέον είναι διάφορο του κενού, αφού περιέχει τον $\alpha-0\cdot\beta=\alpha\ge0$. Αν υ είναι το ελάχιστο στοιχείο[1] του S, τότε θα υπάρχει $\kappa\in\mathbf{N}$, τέτοιος, ώστε $\upsilon=\alpha-\kappa\beta$, οπότε θα ισχύει

$$\alpha=\kappa\beta+\upsilon \quad \text{και} \quad 0\le\upsilon.$$

Για τον υ πρέπει να δείξουμε ότι είναι και μικρότερος του β. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\upsilon\ge\beta$. Τότε

$$\upsilon-\beta\ge0 \quad \text{και} \quad \upsilon-\beta=\alpha-\kappa\beta-\beta=\alpha-(\kappa+1)\beta=\alpha-x\beta \quad \text{με} \quad x=\kappa+1\in\mathbf{N}.$$

Άρα, ο $\upsilon-\beta$ είναι στοιχείο του συνόλου S, του οποίου ελάχιστο στοιχείο είναι το υ. Έτσι θα ισχύει $\upsilon-\beta\ge\upsilon$, που είναι άτοπο. Επομένως, $\alpha=\kappa\beta+\upsilon, 0\le\upsilon<\beta$.

- Μένει τώρα να αποδείξουμε ότι οι φυσικοί αριθμοί κ και υ είναι μοναδικοί. Ας υποθέσουμε ότι και οι φυσικοί κ' και υ' έχουν την ιδιότητα

$$\alpha=\kappa'\beta+\upsilon',\ \ 0\le\upsilon'<\beta.$$

Επειδή $\alpha=\kappa\beta+\upsilon$, $0\le\upsilon<\beta$, θα ισχύει $\kappa'\beta+\upsilon'=\kappa\beta+\upsilon$, οπότε

$$\upsilon-\upsilon'=\beta(\kappa'-\kappa).$$

---

[1] Αποδεικνύεται ότι κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο ("αρχή της καλής διάταξης").

Όμως, $0 \le \upsilon < \beta$ και $0 \le \upsilon' < \beta$, οπότε $-\beta < -\upsilon' \le 0$. Επομένως, με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} -\beta < & \quad \upsilon - \upsilon' \quad < \beta \\ -\beta < & \ \beta(\kappa' - \kappa) < \beta \\ -1 < & \quad \kappa' - \kappa \quad < 1 \end{aligned}$$

Αλλά ο μοναδικός ακέραιος μεταξύ -1 και 1 είναι το 0. Άρα $\kappa' - \kappa = 0$, δηλαδή $\kappa' = \kappa$, οπότε και $\upsilon' = \upsilon$. ■

Αποδεικνύεται ότι το θεώρημα ισχύει γενικότερα για οποιουσδήποτε ακέραιους α και β, με $\beta \neq 0$ και διατυπώνεται ως εξής:

Αν α και β ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ και υ, τέτοιοι, ώστε $$\alpha = \kappa\beta + \upsilon, \quad 0 \le \upsilon < \lvert\beta\rvert.$$

Η διαδικασία εύρεσης των κ, υ λέγεται **ευκλείδεια ή αλγοριθμική διαίρεση** του α με τον β. Το κ λέγεται **πηλίκο** και το υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης αυτής. Όταν το υπόλοιπο μιας ευκλείδειας διαίρεσης είναι ίσο με το 0, η διαίρεση λέγεται **τέλεια**.

Ας δούμε με παραδείγματα πώς εργαζόμαστε στις διάφορες περιπτώσεις, για να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο μιας ευκλείδειας διαίρεσης.

- Έστω λοιπόν $\alpha = -92$ και $\beta = 5$. Από τη διαίρεση του 92 με τον 5 έχουμε $92 = 5 \cdot 18 + 2$ και επομένως,

$$\begin{aligned} -92 &= -5 \cdot 18 - 2 \\ &= -5 \cdot 18 - 5 + 5 - 2 \\ &= -5 \cdot 19 + 3 \\ &= 5(-19) + 3. \end{aligned}$$

Άρα, $-92 = 5 \cdot (-19) + 3$, με $0 \le 3 < 5$, που σημαίνει ότι το πηλίκο της διαίρεσης του -92 με τον 5 είναι -19 και το υπόλοιπο είναι 3.

- Έστω τώρα $\alpha = -92$ και $\beta = -5$. Από την ισότητα $92 = 5 \cdot 18 + 2$ έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} -92 &= -5 \cdot 18 - 2 \\ &= -5 \cdot 18 - 5 + 5 - 2 \\ &= (-5) \cdot 19 + 3. \end{aligned}$$

Άρα, $-92 = (-5) \cdot 19 + 3$, με $0 \le 3 < \lvert -5 \rvert$, που σημαίνει ότι το πηλίκο της διαίρεσης του -92 με τον -5 είναι 19 και το υπόλοιπο είναι 3.

- Έστω, τέλος, $\alpha=92$ και $\beta=-5$. Πάλι από την ισότητα $92=5\cdot 18+2$ έχουμε:

$$92=(-5)\cdot(-18)+2, \quad \text{με} \quad 0\leq 2<|-5|$$

που σημαίνει ότι το πηλίκο της διαίρεσης του 92 με τον -5 είναι -18 και το υπόλοιπο είναι 2.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν ο διαιρέτης της ευκλείδειας διαίρεσης είναι ο $\beta=2$, τότε τα δυνατά υπόλοιπα είναι $\upsilon=0$ ή $\upsilon=1$.
Αν $\upsilon=0$, ο ακέραιος α έχει τη μορφή $\boldsymbol{\alpha=2\kappa}$, $\kappa\in\mathbf{Z}$ και λέγεται **άρτιος**, ενώ
Αν $\upsilon=1$, ο ακέραιος έχει τη μορφή $\boldsymbol{\alpha=2\kappa+1}$, $\kappa\in\mathbf{Z}$ και λέγεται **περιττός**.
Γενικά, τα δυνατά υπόλοιπα του α με τον $\beta>0$ είναι οι αριθμοί

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \beta-1.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Αν ο α είναι ακέραιος, τότε και ο $\dfrac{\alpha(\alpha^2+2)}{3}$ είναι ακέραιος.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα δυνατά υπόλοιπα του α με τον 3 είναι 0, 1, 2, ο ακέραιος α έχει μία από τις μορφές $\alpha=3\kappa$ ή $\alpha=3\kappa+1$ ή $\alpha=3\kappa+2$, $\kappa\in\mathbf{Z}$.

- Αν $\alpha=3\kappa$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, τότε
$$\frac{\alpha(\alpha^2+2)}{3}=\frac{3\kappa\left[(3\kappa)^2+2\right]}{3}=\kappa(9\kappa^2+2)\in\mathbf{Z}.$$
- Αν $\alpha=3\kappa+1$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, τότε
$$\frac{\alpha(\alpha^2+2)}{3}=\frac{(3\kappa+1)\left[(3\kappa+1)^2+2\right]}{3}=(3\kappa+1)(3\kappa^2+2\kappa+1)\in\mathbf{Z}.$$
- Αν $\alpha=3\kappa+2$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, τότε
$$\frac{\alpha(\alpha^2+2)}{3}=\frac{(3\kappa+2)\left[(3\kappa+2)^2+2\right]}{3}=(3\kappa+2)(3\kappa^2+4\kappa+2)\in\mathbf{Z}.$$

2. **Να αποδειχτεί ότι:**

(i) Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός.
(ii) Το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου είναι της μορφής $8\lambda+1$, $\lambda\in\mathbf{Z}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Έστω δύο διαδοχικοί ακέραιοι α, $\alpha+1$.

- Αν ο α είναι άρτιος, δηλαδή $\alpha=2\kappa$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, τότε

$$\alpha(\alpha+1)=2\cdot\underbrace{\kappa(2\kappa+1)}_{\lambda}=2\lambda\text{, άρτιος.}$$

- Αν ο α είναι περιττός, δηλαδή $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, τότε

$$\alpha(\alpha+1)=(2\kappa+1)(2\kappa+2)=2\cdot\underbrace{(2\kappa+1)(\kappa+1)}_{\lambda}=2\lambda\text{, άρτιος.}$$

(ii) Έστω ο περιττός $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Τότε έχουμε

$$\alpha^2=(2\kappa+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1=4\underbrace{\kappa(\kappa+1)}_{2\lambda}+1=4\cdot 2\lambda+1=8\lambda+1,\ \lambda\in\mathbf{Z}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδας

1. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον β σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $\alpha=83$ και $\beta=11$ (ii) $\alpha=-83$ και $\beta=11$

(iii) $\alpha=83$ και $\beta=-11$ (iv) $\alpha=-83$ και $\beta=-11$.

2. Να αποδείξετε ότι:
(i) Το τετράγωνο ενός ακεραίου α παίρνει τη μορφή:

$$\alpha^2=3\kappa,\quad \kappa\in\mathbf{Z}\quad \text{ή}\quad \alpha^2=3\kappa+1,\quad \kappa\in\mathbf{Z}.$$

(ii) Κάθε ακέραιος α της μορφής $\alpha=6\kappa+5$, $\kappa\in\mathbf{Z}$ μπορεί να πάρει τη μορφή $\alpha=3\lambda+2$, $\lambda\in\mathbf{Z}$. Ισχύει το αντίστροφο;

3. Αν α είναι ένας περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2+(\alpha+2)^2+(\alpha+4)^2+1}{12}\in\mathbf{Z}.$$

4. Μπορεί ο αριθμός 25 να γραφεί ως άθροισμα 10 προσθετέων, καθένας από τους οποίους να είναι ίσος με 1 ή 3 ή 5;

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Για ποιες τιμές του θετικού ακεραίου β το πηλίκο της διαίρεσης του 660 με τον β είναι ίσο με 17; Ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης αυτής σε καθεμιά περίπτωση;

2. Αν α, β, γ είναι περιττοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.
Έχει ακέραιες λύσεις η εξίσωση $x^2 + 3^{1997}x + 2001 = 0$;

3. Αν α, β είναι δύο περιττοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι

(i) $\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{8} \in \mathbf{Z}$ και (ii) $\dfrac{\alpha^4 + \beta^4 - 2}{16} \in \mathbf{Z}$.

4. Για ποιες τιμές του ακεραίου κ ο αριθμός $\dfrac{3\kappa + 4}{5}$ είναι ακέραιος;

5. Να αποδείξετε ότι:

(i) Το τετράγωνο ενός άρτιου είναι της μορφής $\alpha^2 = 4\lambda$, $\lambda \in \mathbf{Z}$, ενώ το τετράγωνο ενός περιττού είναι της μορφής $\alpha^2 = 4\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

(ii) Αν α, β είναι περιττοί ακέραιοι, τότε η εξίσωση $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(iii) Κανένας από τους όρους της αριθμητικής προόδου: 6,10,14,18,22,... δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.

4.3 *ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ*

Εισαγωγή

Στα “Στοιχεία” του Ευκλείδη, βιβλία VII, VIII και IX (περίπου 300 π.Χ.), οι θετικοί ακέραιοι παριστάνονται ως ευθύγραμμα τμήματα και η έννοια της διαιρετότητας συνδέεται άμεσα με τη μέτρηση των ευθύγραμμων τμημάτων. Ο Ευκλείδης στην αρχή του βιβλίου VII δίνει 22 ορισμούς, μεταξύ των οποίων και οι εξής:

Διαιρέτης: *Μέρος εστίν αριθμός αριθμού ο ελάσσων του μείζονος, όταν καταμετρή τον μείζονα.*
Πολλαπλάσιο: *Πολλαπλάσιος δε ο μείζων του ελάσσονος, όταν καταμετρήται υπό του ελάσσονος.*
Άρτιος αριθμός: *Άρτιος αριθμός έστιν ο δίχα διαιρούμενος.*
Περιττός αριθμός: *Περισσός δε ο μη διαιρούμενος δίχα ή ο μονάδι διαφέρων αρτίου αριθμού.*
Πρώτος αριθμός: *Πρώτος αριθμός έστιν ο μονάδι μόνη μετρούμενος.*

Πρώτοι μεταξύ τους: *Πρώτοι προς αλλήλους αριθμοί εισίν οι μονάδι μετρούμενοι κοινώ μέτρω.*

Τελευταίος δίνεται ο ορισμός του τέλειου αριθμού, δηλαδή αυτού που είναι ίσος με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του, για παράδειγμα, $28=1+2+4+7+14$:

Τέλειος αριθμός έστιν ο τοις εαυτού μέρεσιν ίσος ών.

Το ενδιαφέρον των αρχαίων μαθηματικών για τους τέλειους αριθμούς φαίνεται ότι προκλήθηκε από την εξαιρετική σπανιότητά τους. Είναι χαρακτηριστική η παρατήρηση του M. Mersenne (1588-1642) ότι "οι τέλειοι αριθμοί είναι τόσο σπάνιοι όσο και οι τέλειοι άνθρωποι".

Η Θεωρία Αριθμών αρχίζει στο βιβλίο VII με δύο προτάσεις για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών (Ευκλείδειος αλγόριθμος) και ολοκληρώνεται στην τελευταία πρόταση του βιβλίου IX με μια μέθοδο προσδιορισμού τέλειων αριθμών. Με σύγχρονο συμβολισμό, στην πρόταση αυτή ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι:

Αν ο αριθμός $1+2+2^2+...+2^{\nu-1}=2^\nu-1$ *είναι πρώτος, τότε ο αριθμός* $2^{\nu-1}(2^\nu-1)$ *είναι τέλειος.*

Έτσι, η γνώση ενός πρώτου αριθμού της μορφής $2^\nu-1$ οδηγεί αμέσως στην ανακάλυψη ενός τέλειου αριθμού. Οι πρώτοι 5 αριθμοί αυτού του είδους είναι οι $2^2-1=3$, $2^3-1=7$, $2^5-1=31$, $2^7-1=127$, $2^{13}-1=8191$ και μας δίνουν τους πρώτους 5 τέλειους αριθμούς $6, 28, 496, 8128$ και 33550336. Μέχρι σήμερα έχουν βρεθεί 36 τέλειοι αριθμοί.

Έννοια Διαιρετότητας

Στην ευκλείδεια διαίρεση ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία το υπόλοιπο είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή η περίπτωση της τέλειας διαίρεσης. Την περίπτωση αυτή θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω α, β δύο ακέραιοι με $\beta\neq 0$. Θα λέμε ότι ο $\boldsymbol{\beta}$ **διαιρεί τον** $\boldsymbol{\alpha}$ και θα γράφουμε $\boldsymbol{\beta|\alpha}$, όταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια, δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος *κ*, τέτοιος, ώστε $\alpha=\kappa\beta$.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **διαιρέτης** ή **παράγοντας** του α ή ότι ο $\boldsymbol{\alpha}$ **διαιρείται με τον** $\boldsymbol{\beta}$ ή ακόμα ότι ο $\boldsymbol{\alpha}$ **είναι πολλαπλάσιο του** $\boldsymbol{\beta}$, και γράφουμε $\boldsymbol{\alpha=\pi o\lambda\beta}$.

Για να δηλώσουμε ότι ο ακέραιος β δε διαιρεί τον ακέραιο α, γράφουμε $\beta\nmid\alpha$ ή ισοδύναμα $\alpha\neq\pi o\lambda\beta$. Για παράδειγμα, $5|20$, αφού $20=4\cdot 5$, ενώ $5\nmid 18$, αφού η διαίρεση του 18 με τον 5 δεν είναι τέλεια.

Αν $\beta \mid \alpha$, τότε $\alpha = \kappa\beta$ ή ισοδύναμα $\alpha = (-\kappa)(-\beta)$, που σημαίνει ότι αν ο β είναι διαιρέτης του α, τότε και ο $-\beta$ είναι διαιρέτης του α. Επομένως, οι διαιρέτες ενός ακέραιου εμφανίζονται κατά ζεύγη αντίθετων ακέραιων.

Ως άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού έχουμε τις εξής:

- $\pm 1 \mid \alpha$ και $\pm\alpha \mid \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbf{Z}^*$
- $\beta \mid 0$, για κάθε $\beta \in \mathbf{Z}^*$
- Αν $\beta \mid \alpha$, τότε $\kappa\beta \mid \kappa\alpha$, για κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}^*$

Τονίζουμε ότι στο συμβολισμό $\beta|\alpha$, οι αριθμοί α και β είναι πάντα ακέραιοι και $\beta \neq 0$.
Θα γνωρίσουμε τώρα μερικές χρήσιμες ιδιότητες της διαιρετότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω α, β, γ ακέραιοι. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες
(i) Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$, τότε $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$.
(ii) Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$, τότε $\alpha \mid \gamma$.
(iii) Αν $\alpha|\beta$, τότε $\alpha|\lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ.
(iv) Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(\beta+\gamma)$.
(v) Αν $\alpha|\beta$ και $\beta\neq 0$, τότε $|\alpha|\leq|\beta|$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Επειδή $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$, υπάρχουν ακέραιοι κ,λ, τέτοιοι, ώστε $\beta=\kappa\alpha$ και $\alpha=\lambda\beta$, οπότε $\alpha=\kappa\lambda\alpha$ και επομένως, $\kappa\lambda=1$, που σημαίνει ότι $\kappa=\lambda=1$ ή $\kappa=\lambda=-1$, δηλαδή ότι $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$.
(ii) Επειδή $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι, ώστε $\beta=\kappa\alpha$ και $\gamma=\lambda\beta$, οπότε $\gamma=\lambda\kappa\cdot\alpha$ και άρα $\alpha|\gamma$.
(iii) Επειδή $\alpha|\beta$ υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος, ώστε $\beta=\kappa\alpha$, οπότε $\lambda\beta=\lambda\kappa\cdot\alpha$ και άρα $\alpha|\lambda\beta$.
(iv) Επειδή $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, υπάρχουν ακέραιοι κ,λ, τέτοιοι, ώστε $\beta=\kappa\alpha$ και $\gamma=\lambda\alpha$, οπότε $\beta+\gamma=(\kappa+\lambda)\alpha$ και άρα $\alpha|(\beta+\gamma)$.
(v) Επειδή $\alpha|\beta$ και $\beta\neq 0$, υπάρχει ακέραιος $\kappa\neq 0$ με $\beta=\kappa\alpha$. Επομένως, $|\beta|=|\kappa|\cdot|\alpha|\geq|\alpha|$, αφού $|\kappa|\geq 1$. ■

Από τις ιδιότητες (iii) και (iv) του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ότι:

"Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(\kappa\beta+\lambda\gamma)$ για όλους τους ακεραίους κ και λ."

Ο ακέραιος $\kappa\beta+\lambda\gamma$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbf{Z}$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των β και γ.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν α,δ ακέραιοι με $\delta|(2\alpha+1)$ και $\delta|(3\alpha-1)$, να βρεθούν οι πιθανές θετικές τιμές του δ.

ΛΥΣΗ

Επειδή $\delta|(2\alpha+1)$ και $\delta|(3\alpha-1)$, ο δ διαιρεί και τον $3(2\alpha+1)-2(3\alpha-1)=5$. Αφού λοιπόν $\delta>0$ και $\delta|5$, θα είναι $\delta=1$ ή $\delta=5$.

2. Να αποδειχτεί ότι $9^{\nu+1}-8\nu-9=\pi o\lambda 64$, για κάθε $\nu\in \mathbf{N}^*$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θα αποδείξουμε την πρόταση με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

- Η ισότητα ισχύει για $\nu=1$, αφού $9^{1+1}-8\cdot 1-9=64=\pi o\lambda 8$
- Θα αποδείξουμε ότι

$$\text{αν } 9^{\nu+1}-8\nu-9=\pi o\lambda 64=64\lambda,\ \lambda\in\mathbf{Z},\quad \text{τότε}\quad 9^{\nu+2}-8(\nu+1)-9=\pi o\lambda 64.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}9^{\nu+2}-8(\nu+1)-9&=9\cdot 9^{\nu+1}-8\nu-17\\&=9(64\lambda+8\nu+9)-8\nu-17\\&=9\lambda\cdot 64+72\nu+81-8\nu-17\\&=64(9\lambda+\nu+1)\\&=\pi o\lambda 64.\end{aligned}$$

Άρα η ισότητα αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους.

3. Να αποδειχτεί ότι ο 3 διαιρεί τους ακεραίους α και β, αν και μόνο αν ο 3 διαιρεί το άθροισμα $\alpha^2+\beta^2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αν $3|\alpha$ και $3|\beta$, τότε $3|(\alpha\cdot\alpha+\beta\cdot\beta)$, δηλαδή $3|(\alpha^2+\beta^2)$.

- Έστω $3|(\alpha^2+\beta^2)$. Αν $\alpha=3\kappa_1+\upsilon_1$, $0\le\upsilon_1<3$ και $\beta=3\kappa_2+\upsilon_2$, $0\le\upsilon_2<3$ είναι οι ισότητες των αλγοριθμικών διαιρέσεων των α και β με τον 3, τότε

$$\alpha^2=9\kappa_1^2+6\kappa_1\upsilon_1+\upsilon_1^2=3\underbrace{(3\kappa_1^2+2\kappa_1\upsilon_1)}_{\lambda_1}+\upsilon_1^2=3\lambda_1+\upsilon_1^2.$$

$$\beta^2=9\kappa_2^2+6\kappa_2\upsilon_2+\upsilon_2^2=3\underbrace{(3\kappa_2^2+2\kappa_2\upsilon_2)}_{\lambda_2}+\upsilon_2^2=3\lambda_2+\upsilon_2^2.$$

οπότε $\alpha^2+\beta^2=3\lambda+(\upsilon_1^2+\upsilon_2^2)$, όπου $\lambda=\lambda_1+\lambda_2\in\mathbf{Z}$.

Επειδή $3|(\alpha^2+\beta^2)$ και $3|3\lambda$, πρέπει $3|(\upsilon_1^2+\upsilon_2^2)$. Όμως $\upsilon_1, \upsilon_2 \in\{0,1,2\}$ οπότε, για τις τιμές της παράστασης $(\upsilon_1^2+\upsilon_2^2)$, έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

$\upsilon_2 \backslash \upsilon_1$	**0**	**1**	**2**
0	$\upsilon_1^2+\upsilon_2^2=\mathbf{0}$	$\upsilon_1^2+\upsilon_2^2=\mathbf{1}$	$\upsilon_1^2+\upsilon_2^2=\mathbf{4}$
1	$\upsilon_1^2+\upsilon_2^2=\mathbf{1}$	$\upsilon_1^2+\upsilon_2^2=\mathbf{2}$	$\upsilon_1^2+\upsilon_2^2=\mathbf{5}$
2	$\upsilon_1^2+\upsilon_2^2=\mathbf{4}$	$\upsilon_1^2+\upsilon_2^2=\mathbf{5}$	$\upsilon_1^2+\upsilon_2^2=\mathbf{8}$

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι $3|(\upsilon_1^2+\upsilon_2^2)$, μόνο όταν $\upsilon_1=0$ και $\upsilon_2=0$, δηλαδή μόνο όταν $\alpha=3\kappa_1$ και $\beta=3\kappa_2$, που σημαίνει ότι $3|\alpha$ και $3|\beta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν υπερβαίνουν τον 1000 και διαιρούνται με:

(i) τον 5, (ii) τον 25, (iii) τον 125, (iv) τον 625.

2. Αν $\alpha|\beta$ και $\gamma|\delta$, να αποδείξετε ότι $\alpha\gamma|\beta\delta$.

3. Αν $11|(\alpha+2)$ και $11|(35-\beta)$, να αποδείξετε ότι $11|(\alpha+\beta)$.

4. Αν η διαφορά δύο ακεραίων είναι άρτιος αριθμός, να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 4.

5. Αν $m|\alpha$ και $m>1$, να αποδείξετε ότι $m\nmid\alpha+1$.

6. Να αποδείξετε ότι $2|(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ για όλους τους ακέραιους α,β,γ.

B΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω α ένας περιττός ακέραιος. Να αποδείξετε ότι

(i) Το τετράγωνο του α είναι της μορφής $\alpha^2=4\lambda+1$, $\lambda\in\mathbf{Z}$

(ii) $32|(\alpha^2+3)(\alpha^2+7)$

2. Να αποδείξετε ότι $4\nmid(\alpha^2+2)$, για κάθε $\alpha\in\mathbf{Z}$.

3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι που να είναι και οι δύο τετράγωνα ακεραίων.

4. Αν $\beta|\alpha$ να αποδείξετε ότι $(2^\beta-1)|(2^\alpha-1)$.

5. Να αποδείξετε ότι

(i) Το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 6.

(ii) $6|\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)$ για κάθε $\alpha\in\mathbf{Z}$

(iii) $6|(\alpha^3+3\alpha^2-4\alpha)$ για κάθε $\alpha\in\mathbf{Z}$.

6. Να αποδείξετε ότι

(i) $3|(\nu^3+2\nu)$ για κάθε $\nu\in\mathbf{N}$

(ii) $64|(9^{\nu+1}-8\nu-9)$ για κάθε $\nu\in\mathbf{N}$

(iii) $5|(3\cdot 27^\nu+2\cdot 2^\nu)$ για κάθε $\nu\in\mathbf{N}$

(iv) $14|(3^{4\nu+2}+5^{2\nu+1})$ για κάθε $\nu\in\mathbf{N}$

7. Έστω $\alpha,\beta,\kappa,\lambda\in\mathbf{Z}$ με $\kappa\neq\lambda$. Αν $(\kappa-\lambda)|(\kappa\alpha+\lambda\beta)$, να αποδείξετε ότι $(\kappa-\lambda)|(\lambda\alpha+\kappa\beta)$.

4.4 ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ - ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΙΝΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

Έστω α, β δύο ακέραιοι. Ένας ακέραιος δ λέγεται **κοινός διαιρέτης** των α και β, όταν είναι διαιρέτης και του α και του β. Το σύνολο των θετικών κοινών διαιρετών δύο ακεραίων έχει ένα τουλάχιστον στοιχείο, αφού ο 1 είναι πάντα ένας θετικός κοινός διαιρέτης τους. Αν ένας τουλάχιστον από τους δύο ακεραίους είναι διαφορετικός από το 0, τότε το σύνολο των θετικών κοινών διαιρετών τους είναι πεπερασμένο, και επομένως ανάμεσά τους υπάρχει μέγιστο στοιχείο. Αν όμως και οι δύο ακέραιοι είναι μηδέν, τότε κάθε θετικός ακέραιος είναι κοινός διαιρέτης τους και επομένως το σύνολο των θετικών κοινών διαιρετών τους δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω α και β δύο ακέραιοι, από τους οποίους ένας τουλάχιστον είναι διάφορος του μηδενός. Ορίζουμε ως **μέγιστο κοινό διαιρέτη** (Μ.Κ.Δ.) των α και β, και τον συμβολίζουμε με $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, το μεγαλύτερο[1] από τους θετικούς κοινούς διαιρέτες τους.

Δηλαδή, ο Μ.Κ.Δ. δύο ακεραίων α και β είναι ο μοναδικός *θετικός* ακέραιος δ που έχει τις επόμενες δύο ιδιότητες:

(1) $\delta|\alpha$ και $\delta|\beta$

(2) Αν $x|\alpha$ και $x|\beta$, τότε $x \le \delta$.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(|\boldsymbol{\alpha}|,|\boldsymbol{\beta}|).$$

Έτσι ,για παράδειγμα, αν $\alpha=-12$ και $\beta=30$, τότε $(-12,30)=(12,30)=6$, αφού οι θετικοί διαιρέτες του 12 είναι οι $1,2,3,4,6,12$, του 30 οι $1,2,3,5,6,10,15,30$ και ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τους είναι ο 6.

Παρατηρούμε επίσης ότι:

- Για κάθε *θετικό* ακέραιο α ισχύει $(\alpha,\alpha)=\alpha$, $(\alpha,0)=\alpha$ και $(\alpha,1)=1$.
- Αν α, β είναι δύο *θετικοί* ακέραιοι με $\beta|\alpha$, τότε $(\alpha,\beta)=\beta$.

Δύο ακέραιοι α και β, που έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα, για τους οποίους δηλαδή ισχύει $(\alpha,\beta)=1$, λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους**. Για παράδειγμα, οι 28 και 15 είναι πρώτοι μεταξύ τους, αφού $(28,15)=1$.

Αν για τον υπολογισμό του Μ.Κ.Δ. δύο ακεραίων προσδιορίζουμε προηγουμένως τους διαιρέτες τους, τότε, ιδιαίτερα για μεγάλους αριθμούς, απαιτείται πολύς χρόνος. Μια σύντομη και αποτελεσματική μέθοδος προσδιορισμού του Μ.Κ.Δ. οφείλεται στον Ευκλείδη και λέγεται **ευκλείδειος αλγόριθμος**. Ο αλγόριθμος αυτός στηρίζεται στο επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Αν α, β είναι δύο φυσικοί αριθμοί και υ είναι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον β, τότε

[1] Αποδεικνύεται ότι: “Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του **R** έχει μέγιστο στοιχείο”.

$$(\alpha,\beta)=(\beta,\upsilon) .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\alpha=\kappa\beta+\upsilon$, $0\leq \upsilon<\beta$ η ισότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον β. Αν $\delta=(\alpha,\beta)$ και $\delta'=(\beta,\upsilon)$, τότε:

- Επειδή $\delta|\alpha$ και $\delta|\beta$, προκύπτει ότι $\delta|(\alpha-\kappa\beta)$, δηλαδή $\delta|\upsilon$. Έτσι $\delta|\beta$ και $\delta|\upsilon$, άρα $\delta\leq\delta'$.

- Επειδή $\delta'|\beta$ και $\delta'|\upsilon$, προκύπτει ότι $\delta'|(\kappa\beta+\upsilon)$, δηλαδή $\delta'|\alpha$. Έτσι $\delta'|\beta$ και $\delta'|\alpha$, άρα $\delta'\leq\delta$.

Επομένως, $\delta=\delta'$. ■

Ας χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω θεώρημα στον υπολογισμό του Μ.Κ.Δ. των 111 και 78. Εφαρμόζοντας διαδοχικά την ευκλείδεια διαίρεση έχουμε:

$$\begin{aligned}111&=1\cdot 78+33\\ 78&=2\cdot 33+12\\ 33&=2\cdot 12+9\\ 12&=1\cdot 9+3\\ 9&=3\cdot 3+0 .\end{aligned}$$

Επομένως,

$$(111,\ 78)=(78,\ 33)=(33,\ 12)=(12,\ 9)=(9,\ 3)=(3,\ 0)=3,$$

δηλαδή $(111,78)=3$, που είναι και το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο των διαδοχικών διαιρέσεων.

Γενικά, για δύο θετικούς ακεραίους $\alpha,\ \beta$ με $\alpha>\beta$, η διαδικασία μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Εφαρμόζουμε επανειλημμένα και διαδοχικά την ευκλείδεια διαίρεση και γράφουμε

$$\begin{aligned}\alpha&=\kappa_1\beta+\upsilon_1, & 0&<\upsilon_1<\beta\\ \beta&=\kappa_2\upsilon_1+\upsilon_2, & 0&<\upsilon_2<\upsilon_1\\ \upsilon_1&=\kappa_3\upsilon_2+\upsilon_3, & 0&<\upsilon_3<\upsilon_2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Από τον έλεγχο των ανισοτήτων στη δεξιά στήλη βλέπουμε ότι για την ακολουθία των διαδοχικών υπολοίπων ισχύει $\beta>\upsilon_1>\upsilon_2>\upsilon_3>\ldots\geq 0$. Επομένως, ύστερα από β το πολύ βήματα θα εμφανιστεί το υπόλοιπο 0. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι

$$\upsilon_{\nu-2}=\kappa_\nu\upsilon_{\nu-1}+\upsilon_\nu,\ \ \upsilon_\nu>0$$

$$\upsilon_{\nu-1} = \kappa_{\nu+1}\upsilon_\nu + 0\,.$$

Τότε ισχύει $(\alpha,\beta) = \upsilon_\nu$. Αυτό προκύπτει από τη διαδοχική εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος, σύμφωνα με το οποίο

$$\boldsymbol{(\alpha,\beta)=(\beta,\upsilon_1)=(\upsilon_1,\upsilon_2)=...=(\upsilon_\nu,0)=\upsilon_\nu}\,.$$

Επομένως, ο Μ.Κ.Δ. των α και β είναι **το τελευταίο θετικό υπόλοιπο** των παραπάνω αλγοριθμικών διαίρεσεων.
Η διαδικασία αυτή αποτελεί τον **ευκλείδειο αλγόριθμο** και χρησιμοποιείται γενικότερα για τον προσδιορισμό του Μ.Κ.Δ. δύο οποιωνδήποτε ακεραίων.
Από τον παραπάνω αλγόριθμο μπορεί να προκύψει η πολύ σημαντική ιδιότητα του Μ.Κ.Δ. δύο αριθμών α, β, ότι δηλαδή αυτός μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των α και β.

Για παράδειγμα, από τη διαδικασία προσδιορισμού του Μ.Κ.Δ. των $\alpha=111$ και $\beta=78$ έχουμε:

$$\begin{aligned} 33&=111-1\cdot78\\ 12&=78-2\cdot33\\ 9&=33-2\cdot12\\ 3&=12-1\cdot9 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} 3&=12-1\cdot9=12-1\cdot(33-2\cdot12)=-1\cdot33+3\cdot12\\ &=-1\cdot33+3\cdot(78-2\cdot33)=3\cdot78-7\cdot33\\ &=3\cdot78-7\cdot(111-1\cdot78)=(-7)\cdot111+10\cdot78\,. \end{aligned}$$

Ώστε

$$\mathbf{(111,78)=3=(-7)\cdot111+10\cdot78}\,.$$

Γενικά, ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4

Αν δ είναι ο Μ.Κ.Δ. των α και β, τότε υπάρχουν ακέραιοι κ και λ, τέτοιοι, ώστε

$$\delta=\kappa\alpha+\lambda\beta\,.$$

Δηλαδή, ο Μ.Κ.Δ. δύο ακέραιων μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των ακεραίων αυτών.

Οι ακέραιοι κ και λ δεν είναι μοναδικοί. Για παράδειγμα για το Μ.Κ.Δ. των 111 και 78 είναι $3=(-7)\cdot 111+10\cdot 78$ αλλά και $3=71\cdot 111+(-101)\cdot 78$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1

> Δύο ακέραιοι $\alpha,\ \beta$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, αν και μόνο αν υπάρχουν ακέραιοι $\kappa,\ \lambda$, τέτοιοι, ώστε
> $$\kappa\alpha+\lambda\beta=1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αν $\alpha,\ \beta$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε $(\alpha,\beta)=1$ και επομένως υπάρχουν ακέραιοι $\kappa,\ \lambda$ με $\kappa\alpha+\lambda\beta=1$
- Αν υπάρχουν ακέραιοι $\kappa,\ \lambda$ με $\kappa\alpha+\lambda\beta=1$ και αν $\delta=(\alpha,\beta)$, τότε $\delta|\alpha$ και $\delta|\beta$ και επομένως, $\delta|(\kappa\alpha+\lambda\beta)$, δηλαδή $\delta|1$, οπότε $\delta=1$. ■

Αν $\kappa\alpha+\lambda\beta=\delta$ είναι η γραμμική έκφραση του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων α και β, τότε $\kappa\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)+\lambda\left(\frac{\beta}{\delta}\right)=1$, που σημαίνει ότι $\left(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta}\right)=1$.

Δηλαδή:

"Αν διαιρέσουμε δύο ακέραιους με το Μ.Κ.Δ. τους, προκύπτουν αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους".

ΠΟΡΙΣΜΑ 2

> Οι κοινοί διαιρέτες δύο ακεραίων α και β είναι οι διαιρέτες του μέγιστου κοινού διαιρέτη τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\delta=(\alpha,\beta)$. Προφανώς κάθε διαιρέτης του δ είναι και κοινός διαιρέτης των α και β. Αλλά και αντιστρόφως, κάθε κοινός διαιρέτης δ' των α και β είναι και διαιρέτης του Μ.Κ.Δ. των α,β. Πράγματι, αν $\kappa\alpha+\lambda\beta=\delta$ είναι η γραμμική έκφραση του δ, τότε $\delta'|(\kappa\alpha+\lambda\beta)$, δηλαδή $\delta'|\delta$. ■

Για παράδειγμα, επειδή $(150,120)=30$, οι θετικοί κοινοί διαιρέτες των 150 και 120 είναι οι διαιρέτες του 30, δηλαδή οι ακέραιοι 1,2,3,5,6,10,15 και 30.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3

> Αν για τους ακεραίους $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ισχύει $\alpha|\beta\gamma$ και $(\alpha,\beta)=1$, τότε $\alpha|\gamma$.

Δηλαδή, αν ένας ακέραιος διαιρεί το γινόμενο δύο ακεραίων και είναι πρώτος προς τον έναν, τότε διαιρεί τον άλλο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $(\alpha,\beta)=1$, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι, ώστε $\kappa\alpha+\lambda\beta=1$ και επομένως $\kappa\alpha\gamma+\lambda\beta\gamma=\gamma$. Αφού $\alpha|\alpha\gamma$ και $\alpha|\beta\gamma$, θα ισχύει $\alpha|(\kappa\alpha\gamma+\lambda\beta\gamma)$, δηλαδή $\alpha|\gamma$. ■

Η συνθήκη $(\alpha,\beta)=1$ είναι αναγκαία, για να ισχύει το θεώρημα. Για παράδειγμα, ενώ $4|2\cdot 6$, $4\nmid 2$ και $4\nmid 6$.

Η έννοια του μέγιστου κοινού διαιρέτη γενικεύεται και για περισσότερους από δύο ακεραίους. Συγκεκριμένα, αν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_\nu$ ακέραιοι με έναν τουλάχιστον διάφορο του μηδενός, τότε ορίζουμε ως μέγιστο κοινό διαιρέτη αυτών, και τον συμβολίζουμε με $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_\nu)$, τον μεγαλύτερο από τους θετικούς κοινούς διαιρέτες τους. Αποδεικνύεται ότι:

"Ο Μ.Κ.Δ. τριών ή περισσότερων ακεραίων δε μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε δύο από αυτούς με το μέγιστο κοινό διαιρέτη τους".

Για παράδειγμα $(24,12,16)=((24,16),12)=(8,12)=4$

Για το Μ.Κ.Δ. περισσότερων από δύο ακεραίους ισχύουν ανάλογες ιδιότητες με τις ιδιότητες του Μ.Κ.Δ. δύο ακεραίων. Έτσι ,για παράδειγμα, για τρεις ακέραιους α,β,γ αποδεικνύεται ότι:

- **Αν $\boldsymbol{\delta=(\alpha,\beta,\gamma)}$, τότε υπάρχουν ακέραιοι $\boldsymbol{\kappa,\lambda,\mu}$, τέτοιοι, ώστε**

$$\boldsymbol{\delta=\kappa\alpha+\lambda\beta+\mu\gamma}\ .$$

- **Αν $\boldsymbol{\delta=(\alpha,\beta,\gamma)}$, τότε $\boldsymbol{\left(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta},\frac{\gamma}{\delta}\right)=1}$.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι για τους ακεραίους $\boldsymbol{\alpha,\beta,\kappa}$ ισχύουν

(i) $\boldsymbol{(\alpha,\beta)=(\alpha-\kappa\beta,\beta)}$

(ii) $\boldsymbol{(\alpha,\beta)=(\alpha-\beta,\beta)}$

(iii) $\boldsymbol{(\alpha,\alpha+1)=1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Έστω $\delta=(\alpha,\beta)$ και $\delta'=(\alpha-\kappa\beta,\beta)$, τότε

- $\begin{cases}\delta|\alpha\\ \delta|\beta\end{cases}$, οπότε $\begin{cases}\delta|(\alpha-\kappa\beta)\\ \delta|\beta\end{cases}$. Άρα $\delta|(\alpha-\kappa\beta,\beta)$, δηλαδή $\delta|\delta'$ (1)

- $\begin{cases}\delta'|(\alpha-\kappa\beta)\\ \delta'|\beta\end{cases}$, οπότε $\begin{cases}\delta'|[(\alpha-\kappa\beta)+\kappa\beta]\\ \delta'|\beta\end{cases}$. Άρα $\begin{cases}\delta'|\alpha\\ \delta'|\beta\end{cases}$, οπότε $\delta'|(\alpha,\beta)$, δηλαδή $\delta'|\delta$. (2)

Από (1) και (2) έπεται ότι $\delta=\delta'$.

(ii) Λόγω της (i), για $\kappa=1$, ισχύει $(\alpha,\beta)=(\alpha-\beta,\beta)$.

(iii) Είναι: $(\alpha,\alpha+1)=(\alpha,\alpha+1-\alpha)=(\alpha,1)=1$.

2. Αν για τους ακεραίους α,β,γ ισχύει $\alpha|\gamma,\beta|\gamma$ και $(\alpha,\beta)=1$, τότε $\alpha\beta|\gamma$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $(\alpha,\beta)=1$, υπάρχουν ακέραιοι κ,λ με $\kappa\alpha+\lambda\beta=1$. Επομένως,

$$\kappa\alpha\gamma+\lambda\beta\gamma=\gamma. \quad (1)$$

Όμως, $\alpha|\gamma$ και $\beta|\gamma$, επομένως, $\gamma=\mu\alpha$ και $\gamma=\nu\beta$. Έτσι, η (1) γίνεται $\kappa\nu(\alpha\beta)+\lambda\mu(\alpha\beta)=\gamma$. Άρα $\alpha\beta|\gamma$.

3. (i) Αν $\kappa>0$, να αποδειχτεί ότι $(\kappa\alpha,\kappa\beta)=\kappa(\alpha,\beta)$.
(ii) Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ. των 63 και 84.

ΛΥΣΗ

(i) Έστω $(\alpha,\beta)=\delta$ και $(\kappa\alpha,\kappa\beta)=\delta'$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\kappa\delta|\delta'$ και $\delta'|\kappa\delta$.
Επειδή $\delta|\alpha$ και $\delta|\beta$, έχουμε $\kappa\delta|\kappa\alpha$ και $\kappa\delta|\kappa\beta$. Άρα $\kappa\delta|\delta'$.
Αφού $\delta=(\alpha,\beta)$, υπάρχουν ακέραιοι μ και ν με $\mu\alpha+\nu\beta=\delta$ και επομένως, $\kappa\mu\alpha+\kappa\nu\beta=\kappa\delta$. Όμως $\delta'|\kappa\alpha$ και $\delta'|\kappa\beta$. Άρα $\delta'|\kappa\delta$.
(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}(63,84)&=(3\cdot21,3\cdot28)\\ &=3\cdot(21,28)=3\cdot(7\cdot3,7\cdot4)\\ &=3\cdot7\cdot(3,4)\\ &=3\cdot7\cdot1=\mathbf{21}.\end{aligned}$$

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο Ακεραίων

Ας θεωρήσουμε δύο ακεραίους α και β διαφορετικούς από το μηδέν. Ένας ακέραιος γ θα λέγεται **κοινό πολλαπλάσιο** των α και β, όταν είναι πολλαπλάσιο και του α και του β. Επειδή ο θετικός ακέραιος $|\alpha|\cdot|\beta|$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των α και β, το σύνολο των θετικών πολλαπλάσιων των α και β είναι διάφορο του κενού συνόλου. Το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου αυτού λέγεται ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α και β.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω δύο ακέραιοι α και β, διαφορετικοί από το μηδέν. Ορίζουμε ως **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** (Ε.Κ.Π.) των α και β, και το συμβολίζουμε με $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$, το μικρότερο από τα θετικά κοινά πολλαπλάσια των α και β.

Επομένως, το Ε.Κ.Π. δύο μη μηδενικών ακεραίων α και β είναι ο μοναδικός θετικός ακέραιος ε που έχει τις επόμενες δύο ιδιότητες:

(1) $\varepsilon =$πολα και $\varepsilon =$πολβ

(2) $\varepsilon \leq x$ για κάθε κοινό πολλαπλάσιο x των α και β.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[|\boldsymbol{\alpha}|,|\boldsymbol{\beta}|].$$

Έτσι, για παράδειγμα, για τους ακεραίους -4 και 6 έχουμε $[-4,6]=[4,6]=12$, αφού τα θετικά πολλαπλάσια του 4 είναι $4,8,12,16,20,24,28,...,$ του 6 είναι τα $6,12,18,24,30,36,...,$ τα θετικά κοινά τους πολλαπλάσια είναι $12,24,36,...$ και το μικρότερο θετικό κοινό πολλαπλάσιο είναι το 12.
Παρατηρούμε επίσης ότι για *θετικούς* ακεραίους α, β ισχύει:

- Αν $\beta|\alpha$, τότε $[\alpha,\beta]=\alpha$.
- $[\alpha,1]=\alpha$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5

Αν α, β είναι δύο *θετικοί* ακέραιοι, τότε

$$(\alpha,\beta)\cdot[\alpha,\beta]=\alpha\cdot\beta.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ *

Αν $(\alpha, \beta)=\delta$, αρκεί να δείξουμε ότι $\dfrac{\alpha\beta}{\delta}=[\alpha,\beta]$, αρκεί δηλαδή να δείξουμε ότι

(i) $\frac{\alpha\beta}{\delta} = \text{πολ}\alpha$ και $\frac{\alpha\beta}{\delta} = \text{πολ}\beta$ και

(ii) $\frac{\alpha\beta}{\delta} \leq x$ για κάθε θετικό κοινό πολλαπλάσιο x των α και β.

Επειδή $(\alpha,\beta)=\delta$, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι μ και ν με $\alpha=\mu\delta$ και $\beta=\nu\delta$. Επομένως,

$$\frac{\alpha\beta}{\delta}=\frac{\alpha\delta\nu}{\delta}=\nu\alpha=\text{πολ}\alpha \qquad \text{και} \qquad \frac{\alpha\beta}{\delta}=\frac{\mu\delta\beta}{\delta}=\mu\beta=\text{πολ}\beta .$$

Αν x είναι ένα θετικό κοινό πολλαπλάσιο των α και β, τότε $x=\rho\alpha$ και $x=\sigma\beta$, όπου ρ και σ θετικοί ακέραιοι. Ξέρουμε επίσης ότι υπάρχουν ακέραιοι κ,λ με $\delta=\kappa\alpha+\lambda\beta$. Έτσι, αν θέσουμε $\frac{\alpha\beta}{\delta}=\tau$, τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{\tau}=\frac{x\delta}{\alpha\beta}=\frac{x(\kappa\alpha+\lambda\beta)}{\alpha\beta}=\frac{x\kappa\alpha}{\alpha\beta}+\frac{x\lambda\beta}{\alpha\beta}=\frac{x\kappa}{\beta}+\frac{x\lambda}{\alpha}=\frac{\sigma\beta\kappa}{\beta}+\frac{\rho\alpha\lambda}{\alpha}=\sigma\kappa+\rho\lambda\in\mathbf{Z} .$$

Επομένως $\left.\frac{\alpha\beta}{\delta}\right| x$, οπότε $\frac{\alpha\beta}{\delta}\leq x$. ■

Αν $\alpha,\ \beta\in\mathbf{Z}^*$, τότε από τις ισότητες $(\alpha,\beta)=(|\alpha|,|\beta|)$ και $[\alpha,\beta]=[|\alpha|,|\beta|]$, έχουμε

$$\boldsymbol{(\alpha,\beta)\cdot[\alpha,\beta]=|\alpha|\cdot|\beta|}$$

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτουν δύο σημαντικά πορίσματα:

- Αν οι ακέραιοι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε $[\alpha,\beta]=|\alpha|\cdot|\beta|$. Δηλαδή:
"Το Ε.Κ.Π. δύο πρώτων μεταξύ τους ακεραίων είναι το γινόμενο των απόλυτων τιμών τους".
Για παράδειγμα, $[8,-15]=8\cdot 15=120$, αφού $(8,15)=1$.

- Το Ε.Κ.Π. δύο ακέραιων $\alpha,\ \beta$ διαιρεί κάθε άλλο κοινό πολλαπλάσιο x των α και β, δηλαδή είναι $x=\text{πολ}[\alpha,\beta]$. Άρα:
"Τα κοινά πολλαπλάσια δύο ακεραίων είναι τα πολλαπλάσια του Ε.Κ.Π.".
Για παράδειγμα, τα κοινά πολλαπλάσια των 4 και 6 είναι πολλαπλάσια του $[4,6]=12$, δηλαδή οι ακέραιοι $\pm 12,\pm 24,\pm 36,\pm 48,\ldots$

Η έννοια του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου γενικεύεται και για περισσότερους από δύο ακεραίους. Συγκεκριμένα, αν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu\in\mathbf{Z}^*$, τότε ορίζουμε ως ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) των $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu$, και το συμβολίζουμε με $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu]$, το μικρότερο από τα θετικά κοινά τους πολλαπλάσια. Αποδεικνύεται ότι:

“Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τριών ή περισσότερων ακεραίων δε μεταβάλλεται, αν αντικαταστήσουμε δύο από αυτούς με το ελάχιστο κοινό τους πολλαπλάσιο”.

Για παράδειγμα, $[4,6,16]=\big[[4,6],16\big]=[12,16]=48$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

i) Να αποδειχτεί ότι $[\kappa\alpha,\kappa\beta]=\kappa[\alpha,\beta]$ για κάθε θετικό ακέραιο κ.
ii) Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. των 120 και 150.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Έχουμε $[\kappa\alpha,\kappa\beta]=\dfrac{(\kappa\alpha)\cdot(\kappa\beta)}{(\kappa\alpha,\kappa\beta)}=\dfrac{\kappa^2}{\kappa}\cdot\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha,\beta)}=\kappa\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha,\beta)}=\kappa[\alpha,\beta]$

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}[120,150]&=[10\cdot12,10\cdot15]\\&=10\cdot[12,15]\\&=10\cdot[3\cdot4,3\cdot5]\\&=10\cdot3\cdot[4,5]\\&=30\cdot20=\mathbf{600}\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το Μ.Κ.Δ. των ακεραίων α,β και να τον εκφράσετε ως γραμμικό συνδυασμό των α και β σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

(i) $\alpha=135$ και $\beta=56$, (ii) $\alpha=180$ και $\beta=84$

(iii) $\alpha=-180$ και $\beta=84$, (iv) $\alpha=-180$ και $\beta=-84$.

2. Να αποδείξετε ότι

(i) $(2\kappa+2,2\kappa)=2$, $\kappa\in\mathbf{Z}$ (ii) $(2\nu-1,2\nu+1)=1$, $\nu\in\mathbf{N}^*$

(iii) $[2\nu-1,2\nu+1]=(2\nu-1)(2\nu+1)$, $\nu\in\mathbf{N}^*$ (iv) $(\nu+2,2)|\nu$, $\nu\in\mathbf{N}^*$

(v) $[\nu,\nu+1]=\nu(\nu+1)$, $\nu\in\mathbf{N}^*$.

3. Να αποδείξετε ότι $(\alpha,\beta)\le(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$.

4. Έστω $\alpha,\beta,x,y\in\mathbf{Z}$, με $\alpha x-\beta y=1$. Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta,x+y)=1$.

5. Να αποδείξετε ότι
(i) $(2\alpha-3\beta,4\alpha-5\beta)|\beta$ (ii) $(2\alpha+3,\ 4\alpha+5)=1$ (iii) $(5\alpha+2,\ 7\alpha+3)=1$.

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa\in\mathbf{Z}$ ισχύει:
(i) $\left(2\kappa+1,\ \dfrac{\kappa(\kappa+1)}{2}\right)=1$, (ii) $(4\kappa^2+3\kappa-5,\ 2\kappa^2+\kappa-2)=1$.

7. Να αποδείξετε ότι $(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta)=(\alpha,\beta)$.

8. Να βρείτε το θετικό ακέραιο α για τον οποίο ισχύει
(i) $(\alpha,\alpha+\nu)=1$, για κάθε $\nu\in\mathbf{N}^*$
(ii) $(\nu,\alpha+\nu)=1$, για κάθε $\nu\in\mathbf{N}^*$.

9. Αν $(\alpha,\beta)=1$ και $\gamma|(\alpha+\beta)$, να αποδείξετε ότι $(\alpha,\gamma)=(\beta,\gamma)=1$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $(\alpha,\beta)=1$, να αποδείξετε ότι:
(i) $(\alpha+\beta,\ \alpha-\beta)=1$ ή 2 (ii) $(2\alpha+\beta,\ \alpha+2\beta)=1$ ή 3.

2. Αν $(\alpha,4)=2$ και $(\beta,4)=2$, να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta,\ 4)=4$.

3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι ν, για τους οποίους το κλάσμα $\dfrac{2\nu+3}{5\nu+7}$ απλοποιείται.

4. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^*$. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha,\beta)=[\alpha,\beta]\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

5. Ένας μαθητής στην προσπάθειά του να βρει το Μ.Κ.Δ. τριών ακεραίων α,β,γ βρήκε:
$(\alpha,\beta)=9$, $(\beta,\gamma)=30$ και $(\gamma,\alpha)=12$.
Μπορείτε να απαντήσετε αν έκανε ή όχι λάθος;

6. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$ με $(\alpha,\beta)=\delta$. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\kappa,\lambda\in\mathbf{Z}$ για τους οποίους ισχύει $\delta=\kappa\alpha+\lambda\beta$ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

7. Έστω $\alpha,\beta,\kappa\in\mathbf{N}^*$ με $(\alpha,\kappa)=1$. Να αποδείξετε ότι
(i) $(\alpha,\kappa\beta)=(\alpha,\beta)$ (ii) $[\alpha,\kappa\beta]=\kappa[\alpha,\beta]$.

8. Έστω $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{N}^*$. Να αποδείξετε ότι $[\alpha\gamma,\beta\gamma,\alpha\delta,\beta\delta]=[\alpha,\beta]\cdot[\gamma,\delta]$.

4.5 *ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ*

Εισαγωγή

Δύο από τα σημαντικότερα αποτελέσματα σχετικά με τους πρώτους αριθμούς ήταν γνωστά ήδη από την αρχαιότητα. Το γεγονός ότι κάθε ακέραιος αναλύεται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων εμφανίζεται στα “Στοιχεία” του Ευκλείδη στην εξής μορφή (βιβλίο IX, πρόταση 14):

> *“Εάν ελάχιστος αριθμός υπό πρώτων αριθμών μετρήται, υπ’ ουδενός άλλου πρώτου αριθμού μετρηθήσεται παρέξ των εξ αρχής μετρούντων”.*

Στα “Στοιχεία” επίσης, το γεγονός ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί εμφανίζεται ως εξής (βιβλίο IX, πρόταση 20):

> *“Οι πρώτοι αριθμοί πλείους εισί παντός του προτεθέντος πλήθους πρώτων αριθμών”.*

Το αποτέλεσμα αυτό και η απόδειξή του από τον Ευκλείδη θεωρούνται ένα από τα αριστουργήματα της θεωρητικής μαθηματικής σκέψης. Ο G. Hardy (1877-1947) έγραψε ότι “… είναι τόσο σύγχρονο και σημαντικό όπως και όταν ανεκαλύφθη-εδώ και 2000 χρόνια παρέμεινε ανέπαφο”.

Ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός που έχει εντοπιστεί μέχρι σήμερα είναι ο $2^{2.976.221}-1$, ένας “γίγαντας” με 895.932 ψηφία. Πρόκειται για τον 36ο από τους πρώτους αριθμούς της μορφής $2^{\nu}-1$ που γνωρίζουμε και ο οποίος οδήγησε στην ανακάλυψη του 36ου τέλειου αριθμού (βλπ. προηγούμενο ιστορικό σημείωμα). Οι τεράστιοι αυτοί αριθμοί εντοπίστηκαν με τη βοήθεια κριτηρίων αναγνώρισης πρώτων, που απαιτούν πολύωρη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Άλλοι πρώτοι αριθμοί με ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι αυτοί της μορφής $p=2^{\nu}+1$, όπου $\nu=2^{\kappa}$, από τους οποίους όμως γνωρίζουμε μόνο 5, αυτούς που προκύπτουν για $\kappa=0,1,2,3,4$ και είναι αντίστοιχα οι $3,5,17,257,65537$ (όσοι από τους υπόλοιπους έχουν ελεγχθεί αποδείχτηκαν σύνθετοι). Ο C.F. Gauss σε πολύ νεαρή ηλικία έδειξε ότι ένα κανονικό πολύγωνο κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη, μόνο αν το πλήθος των πλευρών του είναι πρώτος αριθμός αυτής της μορφής ή γινόμενο πρώτων αυτής της μορφής πολλαπλασιασμένο επί μια δύναμη του 2 ή απλώς μια δύναμη του 2.

Το σημαντικότερο όμως ζήτημα σχετικά με τους πρώτους αριθμούς αφορά την κατανομή τους μέσα στην ακολουθία των φυσικών. Η κατανομή αυτή είναι πολύ ακανόνιστη, γιατί από τη μια μεριά υπάρχουν εκατομμύρια ζεύγη των λεγόμενων δίδυμων πρώτων, όπως ,για παράδειγμα, οι $(29, 31)$, $(1451, 1453)$, $(299477, 299479)$, ενώ από την άλλη υπάρχουν τεράστια κενά χωρίς κανέναν πρώτο. Μια σχετική τάξη στο χάος βάζει το “Θεώρημα των πρώτων αριθμών”, σύμφωνα με το οποίο το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι από τον φυσικό ν δίνεται κατά προσέγγιση (καθώς το ν γίνεται πολύ μεγάλο) από τον τύπο $\nu/\ln\nu$. Αυτό το διαπίστωσαν εμπειρικά, μελετώντας πίνακες πρώτων αριθμών, οι A.M. Legendre και C.F. Gauss στα τέλη του 18ου αιώνα, ενώ η πρώτη αυστηρή απόδειξη δόθηκε 100 χρόνια αργότερα.

Έννοια Πρώτου Αριθμού

Παρατηρήσαμε προηγουμένως ότι κάθε ακέραιος $\alpha \neq 0,\pm 1$ διαιρείται με τους ακέραιους ± 1 και $\pm\alpha$. Αν αυτοί είναι και οι μόνοι διαιρέτες του α, τότε αυτός λέγεται πρώτος αριθμός. Δηλαδή:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Κάθε ακέραιος $p \neq 0,\pm 1$ λέγεται **πρώτος αριθμός** ή απλώς **πρώτος**, αν οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του είναι οι 1 και $|p|$.

Για παράδειγμα, οι ακέραιοι 2 και -7 είναι πρώτοι, ενώ ο $8=2\cdot 4$ και ο $-39=3\cdot(-13)$ δεν είναι πρώτοι.

Ένας ακέραιος $\alpha \neq \pm 1$ που δεν είναι πρώτος λέγεται **σύνθετος**. Ένας σύνθετος αριθμός α μπορεί να γραφεί ως γινόμενο $\beta\cdot\gamma$ με $\beta \neq \pm 1$ και $\gamma \neq \pm 1$.
Οι αριθμοί 1 και -1 δε χαρακτηρίζονται ούτε ως πρώτοι ούτε ως σύνθετοι.

Κάθε πρώτος που διαιρεί ένα δοθέντα ακέραιο λέγεται **πρώτος διαιρέτης** του ακεραίου αυτού. Είναι φανερό ότι ο $-\alpha$ είναι πρώτος, αν και μόνο αν ο α είναι πρώτος. Γι' αυτό στη συνέχεια θα περιοριστούμε **μόνο** σε θετικούς πρώτους. Ανάμεσα στους δέκα αριθμούς $1,2,3,\ldots,10$ οι $2,3,5$ και 7 είναι πρώτοι, ενώ οι $4,6,8,$ και 10 είναι σύνθετοι. Ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός άρτιος που είναι πρώτος, όλοι οι άλλοι πρώτοι είναι περιττοί.

Ένα εύλογο ερώτημα είναι το εξής:

“Αν δοθεί ένας θετικός ακέραιος α, πώς μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι πρώτος ή σύνθετος και, στην περίπτωση που είναι σύνθετος, πώς μπορούμε πρακτικά να βρούμε ένα διαιρέτη διαφορετικό από τους 1 και α”;

Η προφανής απάντηση είναι να κάνουμε διαδοχικές διαιρέσεις με τους ακεραίους που είναι μικρότεροι του α. Αν κανένας από αυτούς δε διαιρεί τον α, τότε ο α είναι πρώτος. Αν και η μέθοδος αυτή είναι πολύ απλή στην περιγραφή της, δεν μπορεί να θεωρηθεί πρακτική, γιατί έχει απαγορευτικό κόστος σε χρόνο και εργασία, ιδιαίτερα για μεγάλους αριθμούς.

Υπάρχουν ιδιότητες των σύνθετων ακεραίων που αναφέρονται στα επόμενα θεωρήματα και μας επιτρέπουν να περιορίσουμε σημαντικά τους αναγκαίους υπολογισμούς.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6

Κάθε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 έχει έναν τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ο θετικός ακέραιος $\alpha>1$ και p ο μικρότερος από τους θετικούς διαιρέτες του με $p>1$. Θα αποδείξουμε ότι ο p είναι πρώτος αριθμός. Αν ο p ήταν σύνθετος, θα είχε ένα θετικό διαιρέτη, έστω β με $1<\beta<p$. Αφού όμως $\beta|p$ και $p|\alpha$, τότε θα ισχύει $\beta|\alpha$ (θεώρημα 2). Βρήκαμε έτσι ένα θετικό διαιρέτη β του α που είναι μικρότερος του p. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού ο p θεωρήθηκε ως ο ελάχιστος διαιρέτης του α. Έτσι ο μικρότερος από τους θετικούς διαιρέτες ενός ακεραίου είναι πρώτος αριθμός. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 4

Αν α είναι ένας σύνθετος ακέραιος με $\alpha>1$, τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον πρώτος αριθμός p, τέτοιος, ώστε $p|\alpha$ και $p\le\sqrt{\alpha}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή ο α είναι σύνθετος, γράφεται στη μορφή

$$\alpha=\beta\cdot\gamma, \qquad \text{με } 1<\beta<\alpha \quad \text{και} \quad 1<\gamma<\alpha.$$

Υποθέτουμε ότι $\beta\le\gamma$, οπότε $\beta^2\le\beta\gamma=\alpha$ και επομένως $\beta\le\sqrt{\alpha}$. Αφού $\beta>1$, ο β έχει έναν τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη p και επομένως $p\le\beta\le\sqrt{\alpha}$. Επειδή $p|\beta$ και $\beta|\alpha$, θα ισχύει $p|\alpha$. Επομένως, ο πρώτος p διαιρεί τον α και είναι $p\le\sqrt{\alpha}$. ■

Το παραπάνω συμπέρασμα έχει μεγάλη πρακτική σημασία όταν εξετάζουμε αν ένας ακέραιος $\alpha>1$ είναι πρώτος ή όχι, αφού περιορίζει τις δοκιμές στους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι της $\sqrt{\alpha}$.

Έστω, για παράδειγμα, ο ακέραιος $\alpha=271$. Επειδή $16<\sqrt{271}<17$, χρειάζεται μόνο να εξετάσουμε αν οι πρώτοι που δεν υπερβαίνουν τον 16 είναι διαιρέτες του 271. Οι πρώτοι αυτοί είναι οι 2,3,5,7,11 και 13 και κανένας τους δε διαιρεί τον 271. Άρα, ο 271 είναι πρώτος.

Το Κόσκινο του Ερατοσθένη

Μια έξυπνη τεχνική για τον προσδιορισμό των πρώτων που δεν υπερβαίνουν ένα θετικό ακέραιο $\nu>1$ στηρίζεται στο προηγούμενο θεώρημα και την οφείλουμε στον Αρχαίο Έλληνα μαθηματικό Ερατοσθένη (περίπου 250 π.Χ.). Η τεχνική λέγεται **κόσκινο του Ερατοσθένη** και είναι η εξής:
Γράφουμε σε έναν πίνακα με αύξουσα σειρά τους ακεραίους από 2 μέχρι ν. Αφήνουμε τον πρώτο 2 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του. Ο επόμενος πρώτος στον πίνακα μετά τον 2 είναι ο 3. Αφήνουμε τον 3 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του κτλ. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι τον πρώτο p με $p \leq \sqrt{\nu}$. Οι ακέραιοι που απομένουν, δηλαδή όσοι δεν "έπεσαν" από το "κόσκινο", είναι οι πρώτοι μεταξύ 2 και ν. Όλοι οι άλλοι "έπεσαν", διότι, ως σύνθετοι, είχαν διαιρέτη κάποιον πρώτο μικρότερο ή ίσο της $\sqrt{\nu}$ και ως πολλαπλάσια του διαγράφηκαν.

Στον παρακάτω πίνακα έχουν προσδιοριστεί οι πρώτοι μεταξύ 1 και 100. Έχουν διαγραφεί τα πολλαπλάσια των πρώτων $2,3,5$ και 7, αφού ο επόμενος πρώτος είναι ο αριθμός 11 και ισχύει $11>\sqrt{100}$.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Στο σημείο αυτό πιθανόν να αναρωτηθεί κάποιος: Τελειώνουν κάπου οι πρώτοι; Υπάρχει δηλαδή μέγιστος πρώτος ή οι πρώτοι συνεχίζονται “επ’άπειρον”;

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 (του Ευκλείδη)

Υπάρχουν *ά π ε ι ρ ο ι* θετικοί πρώτοι αριθμοί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων αριθμών $p_1, p_2, ..., p_\nu$. Θα αποδείξουμε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο. Σχηματίζουμε τον αριθμό $\boldsymbol{A = p_1 p_2 \ldots p_\nu + 1}$. Ο αριθμός όμως αυτός, επειδή είναι μεγαλύτερος του 1, θα έχει έναν τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη, έστω τον p_i με $1 \le i \le \nu$. Αλλά αν ο p_i διαιρεί τον A, επειδή διαιρεί και τον $p_1 p_2 \ldots p_\nu$, θα πρέπει να διαιρεί και τον 1. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί $p_i > 1$. ■

Θεμελιώδες Θεώρημα Αριθμητικής

Οι πρώτοι αριθμοί έχουν μεγάλη σπουδαιότητα για τη Θεωρία των Αριθμών, αφού, όπως θα αποδείξουμε στο *Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής*, κάθε φυσικός αναλύεται με μοναδικό τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με άλλα λόγια οι πρώτοι αριθμοί αποτελούν τα δομικά υλικά με τα οποία, μέσω του πολλαπλασιασμού κατασκευάζουμε τους άλλους φυσικούς αριθμούς, όπως για παράδειγμα στη Χημεία με κατάλληλα άτομα σχηματίζουμε τα μόρια των διάφορων ουσιών.
Η απόδειξη του σημαντικού αυτού θεωρήματος στηρίζεται στον ακόλουθο αληθή ισχυρισμό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8

Αν ένας πρώτος p διαιρεί το γινόμενο $\alpha\beta$ δύο ακέραιων, τότε διαιρεί έναν, τουλάχιστον, από τους ακεραίους αυτούς.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι $p \nmid \alpha$. Επειδή ο αριθμός p είναι πρώτος, οι μοναδικοί διαιρέτες του είναι οι 1 και p. Επομένως, ο Μ.Κ.Δ. των α και p είναι $(p,\alpha)=1$, δηλαδή ο p είναι πρώτος προς τον a. Αφού λοιπόν $p|\alpha\beta$ και $(p,\alpha)=1$, σύμφωνα με το Πόρισμα 3, $p|\beta$. ■

Το θεώρημα ισχύει και για γινόμενο περισσότερων ακεραίων. Δηλαδή:
“Αν p πρώτος και $p|\alpha_1\alpha_2\alpha_3 ... \alpha_\nu$, τότε ο p διαιρεί έναν, τουλάχιστον, από τους παράγοντες του γινομένου”.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9

Κάθε θετικός ακέραιος $\alpha > 1$ αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων παραγόντων (αν παραβλέψουμε τη σειρά των παραγόντων).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ *

- Αν ο α είναι πρώτος, τότε προφανώς το θεώρημα ισχύει.

Αν ο α είναι σύνθετος, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 6, θα ισχύει $\alpha = p_1 \cdot \beta_1$, όπου p_1 πρώτος και β_1 ακέραιος με $\alpha > \beta_1 > 1$.

Αν ο β_1 είναι πρώτος, τότε ο α είναι γινόμενο πρώτων παραγόντων και το θεώρημα αληθεύει.

Αν ο β_1 είναι σύνθετος, τότε θα έχουμε $\beta_1 = p_2 \cdot \beta_2$, με p_2 πρώτο και $\alpha > \beta_2 > 1$.

Αν ο β_2 είναι πρώτος, τότε $\alpha = p_1 \cdot p_2 \cdot \beta_2$ και ο α είναι γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Αν ο β_2 είναι σύνθετος, τότε η παραπάνω διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί και οδηγεί σε μια σχέση $\alpha = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \beta_3$, με p_3 πρώτο και $\alpha > \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > 1$.

Αποδεικνύεται ότι αν συνεχίσουμε τη διαδικασία αυτή, ύστερα από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων θα βρούμε τελικά έναν πρώτο p_κ, τέτοιο, ώστε

$$\alpha = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_\kappa .$$

- Ας υποθέσουμε ότι ο α αναλύεται και με άλλο τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, ότι δηλαδή υπάρχουν και οι πρώτοι $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\lambda$, τέτοιοι, ώστε

$$\alpha = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_\kappa = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_\lambda \qquad (1)$$

και έστω ότι $\kappa \leq \lambda$. Ο πρώτος p_1 είναι διαιρέτης του α άρα και του γινομένου $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_\lambda$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 8, ο p_1 θα είναι διαιρέτης ενός τουλάχιστον από τους παράγοντες $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\lambda$, έστω $p_1 | q_\mu$, όπου $1 < \mu < \lambda$.

Ο q_μ όμως είναι πρώτος και έχει ως διαιρέτες μόνο το 1 και τον εαυτό του. Άρα, επειδή $p_1 \neq 1$, θα είναι $p_1 = q_\mu$. Ύστερα από τη διαγραφή των δυο αυτών ίσων παραγόντων, με ανάλογο συλλογισμό συμπεραίνουμε ότι ο p_2 πρέπει να είναι ίσος με έναν, τουλάχιστον από τους υπόλοιπους παράγοντες του δεύτερου μέλους της (1) π.χ. τον q_τ. Αφού διαγράψουμε τους p_2 και q_τ, συνεχίζουμε ομοίως με τους $p_3, \ldots, p_\kappa$. Στο τέλος της διαδικασίας όλοι οι παράγοντες $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\kappa$ θα έχουν διαγραφεί, αφήνοντας μόνο τον αριθμό 1 στο πρώτο μέλος της ισότητας (1). Κανένας όμως και από τους παράγοντες $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\lambda$ δε θα έχει απομείνει και στο δεύτερο μέλος της (1), αφού όλοι αυτοί οι παράγοντες είναι μεγαλύτεροι από το 1. Έτσι, οι παράγοντες $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\kappa$ του πρώτου μέλους σχηματίζουν ζεύγη ίσων αριθμών με τους παράγοντες του δεύτερου μέλους. Αυτό αποδεικνύει ότι, με εξαίρεση ίσως τη σειρά των παραγόντων, οι δύο αναλύσεις του αριθμού είναι ταυτόσημες. ■

Βέβαια, μερικοί από τους πρώτους παράγοντες που εμφανίζονται στην ανάλυση ενός θετικού ακεραίου μπορεί να επαναλαμβάνονται όπως στην περίπτωση του 360 για τον οποίο έχουμε $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Γράφοντας τα γινόμενα των ίδιων παραγόντων με μορφή δυνάμεων, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε το θεώρημα ως εξής:

> Κάθε θετικός ακέραιος $\alpha > 1$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή: $\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_\kappa^{\alpha_\kappa}$,
> όπου οι $p_1, p_2, \dots, p_\kappa$ είναι θετικοί πρώτοι με $p_1 < p_2 < \dots < p_\kappa$ και $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa$ θετικοί ακέραιοι.

Η μορφή $\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_\kappa^{\alpha_\kappa}$ λέγεται και **κανονική μορφή** του α.

Μ.Κ.Δ. και Ε.Κ.Π. Αριθμών σε Κανονική Μορφή

Όταν είναι γνωστή η ανάλυση ενός φυσικού αριθμού α σε πρώτους παράγοντες, εύκολα μπορούμε να επισημάνουμε τους διαιρέτες του.
Έστω $\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_\kappa^{\alpha_\kappa}$ η κανονική μορφή του α και d ένας θετικός διαιρέτης του. Αν p είναι ένας πρώτος που εμφανίζεται στην κανονική μορφή του d, τότε $p|\alpha$ και επομένως, πρέπει $p = p_i$ με $1 \le i \le \kappa$. Επίσης ο p_i δεν μπορεί να εμφανίζεται στον αριθμό d περισσότερο από α_i φορές. Παρατηρούμε δηλαδή ότι ένας διαιρέτης d του α έχει στην κανονική του μορφή παράγοντες μόνο από τους $p_1, p_2, \dots, p_\kappa$ και με εκθέτες ίσους ή μικρότερους των $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa$ αντιστοίχως. Για παράδειγμα, επειδή $12 = 2^3 \cdot 3^1$, οι διαιρέτες του 12 είναι οι $2^0 \cdot 3^0 = 1$, $2^1 \cdot 3^0 = 2$, $2^2 \cdot 3^0 = 4$, $2^0 \cdot 3^1 = 3$, $2^1 \cdot 3^1 = 6$ και $2^2 \cdot 3^1 = 12$.
Με βάση την παρατήρηση αυτή μπορούμε εύκολα να βρούμε Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. αριθμών που έχουν αναλυθεί σε πρώτους παράγοντες. Συγκεκριμένα:

> - Ο Μ.Κ.Δ. θετικών ακεραίων που είναι γραμμένοι σε κανονική μορφή είναι ίσος με το γινόμενο των κοινών τους παραγόντων και με τον κάθε παράγοντα υψωμένο στο μικρότερο εμφανιζόμενο εκθέτη.
> - Το Ε.Κ.Π. θετικών ακεραίων που είναι γραμμένοι σε κανονική μορφή είναι ίσο με το γινόμενο των κοινών και μη κοινών τους παραγόντων και με τον κάθε παράγοντα υψωμένο στο μεγαλύτερο εμφανιζόμενο εκθέτη.

Για παράδειγμα, επειδή $2520=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ και $756=2^2\cdot 3^3\cdot 7$, έχουμε $(2520,756)=2^2\cdot 3^2\cdot 7=\mathbf{252}$ και $[2520,756]=2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7=\mathbf{7560}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι αν ο αριθμός $2^\nu-1$, $\nu\in\mathbf{N}^*$ είναι πρώτος, τότε και ο ν είναι πρώτος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ο ν δεν είναι πρώτος, τότε $\nu=\alpha\beta$ με α,β θετικούς ακέραιους και $\alpha,\beta>1$, οπότε έχουμε $2^\nu-1=2^{\alpha\beta}-1=(2^\alpha)^\beta-1$. Ο αριθμός αυτός, όμως, έχει ως παράγοντα τον $2^\alpha-1$, για τον οποίο ισχύει $\mathbf{1<2^\alpha-1<2^\nu-1}$. Επομένως, ο $2^\nu-1$ είναι σύνθετος που είναι άτοπο.

2. Αν ο φυσικός αριθμός ν δεν είναι τετράγωνο φυσικού, να αποδειχτεί ότι ο αριθμός $\sqrt{\nu}$ είναι άρρητος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι ο αριθμός $\sqrt{\nu}$ είναι ρητός. Τότε $\sqrt{\nu}=\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α και β θετικοί ακέραιοι. Οι ακέραιοι α και β μπορούν να θεωρηθούν πρώτοι μεταξύ τους, γιατί αν δε συμβαίνει αυτό, τους διαιρούμε με το Μ.Κ.Δ. τους, οπότε μετατρέπονται σε πρώτους μεταξύ τους. Από την ισότητα $\sqrt{\nu}=\frac{\alpha}{\beta}$ έχουμε $\alpha^2=\nu\beta^2$. Επειδή ο ν δεν είναι τετράγωνο φυσικού θα είναι $\beta>1$. Επομένως, ο ακέραιος β θα έχει έναν πρώτο διαιρέτη p, οπότε θα ισχύει $p|\alpha^2$, δηλαδή $p|\alpha\cdot\alpha$ και άρα $p|\alpha$ (Θεώρημα 10). Επομένως, $p|\alpha$ και $p|\beta$, που είναι άτοπο, αφού οι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδας

1. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι πρώτοι;

101, 103, 107, 111, 113, 121.

2. Να βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό α για τον οποίο οι αριθμοί:
(i) $\alpha, \alpha+1, \alpha+2$ είναι όλοι σύνθετοι
(ii) $\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \alpha+3$ είναι όλοι σύνθετοι

3. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^*$ και τον πρώτο $p>3$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
(i) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=3$ (ii) $\alpha^2-4=p$ (iii) $(\alpha^2-1)p=15$

4. Να αποδείξετε ότι ο μοναδικός θετικός πρώτος p για τον οποίο ισχύει $3p+1=\nu^2$, όπου $\nu\in\mathbf{N}^*$, είναι ο $p=5$.

5. Να αποδείξετε ότι ο μοναδικός θετικός πρώτος p που μπορεί να πάρει τη μορφή $p=\nu^3-1$, $\nu\in\mathbf{N}^*$ είναι ο $p=7$, ενώ τη μορφή $p=\nu^3+1$, $\nu\in\mathbf{N}^*$, είναι ο $p=2$.

6. Αν α, β είναι δύο περιττοί θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1, να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\alpha^2+\beta^2$ είναι σύνθετος.

7. Έστω α, ν θετικοί ακέραιοι και p θετικός πρώτος. Αν $p|\alpha^\nu$, να αποδείξετε ότι $p^\nu|\alpha^\nu$.

8. Έστω $\alpha, \beta, \mu, \nu\in\mathbf{N}^*$ με $(\alpha,\beta)=1$. Να αποδείξετε ότι $(\alpha^\mu, \beta^\nu)=1$.

9. Να γράψετε στην κανονική τους μορφή τους φυσικούς αριθμούς 490, 1125, 2728 και να βρείτε το Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. αυτών.

10. Έστω $\alpha=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_\kappa^{\alpha_\kappa}$ η κανονική μορφή ενός θετικού ακεραίου α. Να αποδείξετε ότι ο α είναι τετράγωνο ενός θετικού ακεραίου, αν και μόνο αν οι εκθέτες $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa$ είναι όλοι άρτιοι.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $(\alpha,\beta)=1$, να αποδείξετε ότι
(i) $(\alpha+\beta, \alpha\beta)=1$, (ii) $(\alpha^2+\beta^2, \alpha\beta)=1$.

2. Να αποδείξετε την ισοδυναμία:
$$(\alpha,\beta\gamma)=1 \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(\alpha,\gamma)=1.$$

3. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^*$ και p θετικός πρώτος. Αν $(\alpha,p^2)=p$ και $(\beta,p^3)=p^2$, να βρείτε τον $(\alpha\beta,p^4)$ και τον $(\alpha+\beta,p^4)$.

4. Να αποδείξετε ότι οι ακέραιοι της μορφής ν^4+4, όπου ν θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1, και οι ακέραιοι της μορφής $8^\nu+1$, όπου ν θετικός ακέραιος, είναι σύνθετοι αριθμοί.

5. Αν $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^*$ με $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{43}{34}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha+\beta$ είναι σύνθετος.

6. Να αποδείξετε ότι ο μοναδικός θετικός πρώτος p για τον οποίον οι αριθμοί $p, p+2$ και $p+4$ είναι και οι τρεις πρώτοι είναι ο $p=3$.

7. Να λύσετε στο **N** τις εξισώσεις
(i) $x^3+x^2+x-3=0$ (ii) $x^2+x+p=112$, όπου p θετικός πρώτος.

8. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^*$. Αν $\beta^2|\alpha^2$, να αποδείξετε ότι $\beta|\alpha$.

4.6 *Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ*

Εισαγωγή

Ένα από τα αρχαιότερα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών είναι η αναζήτηση των ακέραιων αριθμών που ικανοποιούν κάποιες δεδομένες σχέσεις. Με σύγχρονη ορολογία θα διατυπώσουμε το ίδιο πρόβλημα ως επίλυση, στο **Z**, πολυωνυμικών εξισώσεων με έναν ή περισσότερους αγνώστους και με ακέραιους συντελεστές. Ο κλάδος που ασχολείται με αυτό το ζήτημα ονομάζεται Διοφαντική Ανάλυση προς τιμήν του Διόφαντου (250 περίπου μ.Χ.), που ασχολήθηκε συστηματικά με τέτοιου είδους προβλήματα στο έργο του "Αριθμητικά".

Η αναζήτηση Πυθαγόρειων τριάδων (δηλαδή ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x^2+y^2=z^2$) συγκαταλέγεται ανάμεσα στα κλασικά προβλήματα της Διοφαντικής Ανάλυσης. Υπάρχουν ενδείξεις ότι η λύση αυτού του προβλήματος (που δίνεται σήμερα από τους τύπους $x=\mu^2-\nu^2$, $y=2\mu\nu$ $z=\mu^2+\nu^2$) ήταν γνωστή στους Βαβυλώνιους, αλλά η πλήρης θεωρητική διαπραγμάτευση του ζητήματος έγινε από τους Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Ο Ευκλείδης διατυπώνει το πρόβλημα στη μορφή

> *"Ευρείν δύο τετραγώνους αριθμούς, ώστε και το συγκείμενον εξ αυτών είναι τετράγωνον"*

και δίνει τη γενική λύση στη γεωμετρική γλώσσα των “Στοιχείων” (Βιβλίο X, Λήμμα 1, Πρότ. 28).
Ο Διόφαντος διαπραγματεύεται το ίδιο πρόβλημα στα “Αριθμητικά”

“Τον επιταχθέντα τετράγωνον διελείν εις δύο τετραγώνους”,

αλλά η λύση που δίνει βρίσκεται πιο κοντά στο σύγχρονο αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Αυτό ακριβώς το πρόβλημα ήταν η αφορμή να ισχυριστεί ο P. Fermat (1601-1665) ότι η διοφαντική εξίσωση $x^\nu + y^\nu = z^\nu$ είναι αδύνατη, όταν ο ν είναι φυσικός μεγαλύτερος του 2, σημειώνοντας μάλιστα πάνω στο βιβλίο του Διόφαντου που μελετούσε: “έχω μια αληθινά θαυμάσια απόδειξη αυτής της πρότασης, αλλά το περιθώριο είναι πολύ στενό για να τη χωρέσει”. Ο ισχυρισμός αυτός του Fermat αποδείχτηκε αληθής το 1994 από τον A. Wiles, αφού υπήρξε για 350 χρόνια ένα από τα διασημότερα άλυτα προβλήματα της Θεωρίας Αριθμών.
Η επίλυση διοφαντικών εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου του 2ου αποτελεί ένα ανοικτό μαθηματικό πρόβλημα, καθώς δεν έχουν βρεθεί γενικοί τύποι επίλυσης. Ο D. Hilbert διατύπωσε το 1900, ως ένα ζήτημα βασικής μαθηματικής έρευνας στη διάρκεια του 20ού αιώνα, την αναζήτηση ενός αλγόριθμου επίλυσης μιας διοφαντικής εξίσωσης με οποιοδήποτε αριθμό αγνώστων. Το 1970, ο Y. Matyasevich, σε ηλικία 22 χρόνων, απέδειξε ότι ένας τέτοιος αλγόριθμος δεν υπάρχει.

Επίλυση Γραμμικής Διοφαντικής Εξίσωσης

Έστω η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, όπου α, β, γ ακέραιοι με $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$. Αν αναζητούμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης αυτής, δηλαδή ζεύγη ακεραίων (x, y) που την επαληθεύουν, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε μια **γραμμική διοφαντική εξίσωση**.
Μερικές διοφαντικές εξισώσεις μπορεί να έχουν πολλές λύσεις, όπως, για παράδειγμα, η $3x + 6y = 18$, για την οποία μπορούμε να διαπιστώσουμε με αντικατάσταση ότι τα ζεύγη $(4,1)$, $(-6,6)$, $(10,-2)$ είναι ακέραιες λύσεις της.Υπάρχουν όμως διοφαντικές εξισώσεις που δεν έχουν καμιά λύση. Για παράδειγμα, η διοφαντική εξίσωση $2x + 6y = 13$ δεν έχει καμιά λύση, αφού για όλες τις ακέραιες τιμές των x, y το πρώτο μέλος της είναι άρτιος αριθμός, ενώ το δεύτερο μέλος της είναι περιττός αριθμός. Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει απάντηση στο ερώτημα πότε μια διοφαντική εξίσωση έχει λύση, και αν έχει, πόσες είναι αυτές οι λύσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10

Η γραμμική διοφαντική εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ έχει λύση, αν και μόνο αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δ των α,β διαιρεί το γ.

Αν η εξίσωση αυτή έχει μια λύση (x_0,y_0), τότε έχει άπειρες λύσεις (x,y), που δίνονται από τους τύπους

$$x=x_0+\frac{\beta}{\delta}t,\quad y=y_0-\frac{\alpha}{\delta}t,\quad \text{όπου } t\in\mathbf{Z}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω ότι $\delta|\gamma$,δηλαδή ότι $\gamma=\mu\delta$, $\mu\in\mathbf{Z}$. Γνωρίζουμε ότι για τον $\delta=(\alpha,\beta)$ υπάρχουν ακέραιοι κ,λ, τέτοιοι, ώστε

$$\kappa\alpha+\lambda\beta=\delta. \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της (1) με μ βρίσκουμε $\mu\kappa\alpha+\mu\lambda\beta=\mu\delta$, δηλαδή

$$\alpha(\kappa\mu)+\beta(\lambda\mu)=\gamma.$$

Άρα, το ζεύγος $(\kappa\mu,\lambda\mu)$ είναι μια λύση της εξίσωσης.

Αντιστρόφως, αν (x_0,y_0) είναι μια λύση της διοφαντικής εξίσωσης, τότε θα ισχύει $\alpha x_0+\beta y_0=\gamma$. Επειδή $\delta|\alpha$ και $\delta|\beta$, συμπεραίνουμε ότι $\delta|(\alpha x_0+\beta y_0)$, δηλαδή $\delta|\gamma$.

- Έστω (x_0,y_0) μια λύση της διοφαντικής εξίσωσης $\alpha x+\beta y=\gamma$. Τότε θα ισχύει

$$\alpha x_0+\beta y_0=\gamma.$$

Αν (x',y') είναι μια άλλη λύση της διοφαντικής εξίσωσης $\alpha x+\beta y=\gamma$, τότε θα ισχύει

$$\alpha x'+\beta y'=\gamma,$$

οπότε με αφαίρεση των δυο ισοτήτων κατά μέλη παίρνουμε $\alpha(x_0-x')+\beta(y_0-y')=0$ ή ισοδύναμα

$$\alpha(x_0-x')=-\beta(y_0-y'). \tag{2}$$

Επειδή $\delta=(\alpha,\beta)$, οι αριθμοί $\frac{\alpha}{\delta}=\rho$ και $\frac{\beta}{\delta}=\sigma$ είναι πρώτοι μεταξύ τους. Από την (2), με διαίρεση και των δύο μελών της με δ, έχουμε

$$\rho(x_0-x')=-\sigma(y_0-y'),$$

Έτσι, ο ρ διαιρεί το πρώτο μέλος της ισότητας, οπότε θα διαιρεί και το δεύτερο και επειδή είναι πρώτος προς το σ, θα διαιρεί τον ακέραιο $y_0 - y'$. Επομένως, θα υπάρχει ακέραιος t, τέτοιος, ώστε $y_0 - y' = \rho t$, δηλαδή $y_0 - y' = \frac{\alpha}{\delta}t$. Άρα $y' = y_0 - \frac{\alpha}{\delta}t$, οπότε, λόγω της (2), θα είναι $x' = x_0 + \frac{\beta}{\delta}t$.

Αντιστρόφως, για κάθε $t \in \mathbf{Z}$, ισχύει

$$\alpha\left(x_0 + \frac{\beta}{\delta}t\right) + \beta\left(y_0 - \frac{\alpha}{\delta}t\right) = \alpha x_0 + \beta y_0 + \alpha\frac{\beta}{\delta}t - \beta\frac{\alpha}{\delta}t = \gamma,$$

που σημαίνει ότι και το ζεύγος $\left(x_0 + \frac{\beta}{\delta}t, y_0 - \frac{\alpha}{\delta}t\right)$, $t \in \mathbf{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης.

Ώστε, αν μια διοφαντική εξίσωση έχει μια λύση (x_0, y_0), τότε έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\left(x_0 + \frac{\beta}{\delta}t,\ y_0 - \frac{\alpha}{\delta}t\right)$, $t \in \mathbf{Z}$. ■

Στην περίπτωση που είναι $(\alpha, \delta) = 1$, οι παραπάνω τύποι παίρνουν τη μορφή:

$$x = x_0 + \beta t,\ y = y_0 - \alpha t,\ t \in \mathbf{Z}.$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει, αν λάβουμε υπόψη ότι κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, παριστάνει στο επίπεδο μια ευθεία. Στην περίπτωση που $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}$, η ευθεία αυτή διέρχεται από άπειρα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες, αν και μόνο αν ο $\delta | \gamma$, όπου $\delta = (\alpha, \beta)$.

Για παράδειγμα, η ευθεία $2x + 3y = 1$ διέρχεται από άπειρο πλήθος σημείων με ακέραιες συντεταγμένες, ενώ η $6x + 4y = 5$ δε διέρχεται από κανένα τέτοιο σημείο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Κάποιος οδηγός που χρειάζεται κέρματα, για να ρίξει στο μηχάνημα στάθμευσης (parking), ζητάει από τον περιπτερά να του ανταλλάξει ένα χιλιάρικο με κέρματα των 100 δραχμών και των 50 δραχμών. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η ανταλλαγή, αν ο οδηγός θέλει οπωσδήποτε και κατοστάρικα και πενηντάρικα;

ΛΥΣΗ

Αν η ανταλλαγή μπορεί να γίνει με x κατοστάρικα και y πενηντάρικα, τότε

$$100x+50y=1000 \text{ ή}$$

$$2x+y=20. \qquad (1)$$

Αναζητούμε προφανώς τις ακέραιες και θετικές λύσεις της (1). Επειδή $(2,1)=1$ και $1|20$, η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις. Για να βρούμε το σύνολο των λύσεών της, πρέπει να βρούμε μια μερική λύση (x_0, y_0) της εξίσωσης ή, όπως λέμε, μια *ε ι δ ι κ ή λ ύ σ η* της εξίσωσης.

Εκφράζουμε γραμμικά το Μ.Κ.Δ. των 2 και 1 και έχουμε

$$2(1)+1(-1)=1. \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (2) με 20 και έχουμε $2(20)+1(-20)=20$, που σημαίνει ότι $(x_0, y_0)=(20,-20)$. Επομένως, οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (1) δίνονται από τους τύπους:

$$x=20+1\cdot t, \quad y=-20-2\cdot t, \quad t\in\mathbf{Z}.$$

Από τις λύσεις αυτές πρέπει να βρούμε εκείνες για τις οποίες ισχύει $x>0$ και $y>0$, δηλαδή πρέπει να βρούμε πού συναληθεύουν οι ανισώσεις

$$20+1\cdot t>0 \text{ και } -20-2\cdot t>0, \quad t\in\mathbf{Z}.$$

Από την επίλυση του συστήματος των ανισώσεων προκύπτει ότι $-20<t<-10$, $t\in\mathbf{Z}$. Επομένως, $t=-19,-18,-17,-16,-15,-14,-13,-12,-11$ και οι αντίστοιχες τιμές των x και y φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν ακέραιες λύσεις;

(i) $4x+6y=5$ (ii) $4x-6y=2$

(iii) $3x+5y=\kappa$, $\kappa\in\mathbf{Z}$ (iv) $\kappa x+(\kappa+1)y=\lambda$, $\kappa,\lambda\in\mathbf{Z}$

(v) $2\kappa x+4y=2\lambda+1$, $\kappa,\lambda\in\mathbf{Z}$.

2. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις των εξισώσεων

(i) $2x+3y=5$, (ii) $6x-4y=8$ (iii) $7x-5y=19$, (iv) $5x-3y=7$.

3. Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις των εξισώσεων
(i) $111x+78y=300$, (ii) $47x-31y=78$.

4. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν θετικές ακέραιες λύσεις:
(i) $3x+5y=-15$, (ii) $111x+78y=50$, (iii) $5x+7y=5$.

5. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αλλάξουμε ένα νόμισμα 10.000 δραχμών με νομίσματα των 1.000 και 500 δραχμών;

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ένας καταστηματάρχης παραγγέλνει 19 μεγάλα και 3 μικρά πακέτα συσκευασίας με σαπούνια του ίδιου τύπου. Όταν όμως πήρε την παραγγελία, είδε έκπληκτος ότι η συσκευασία είχε καταστραφεί και τα σαπούνια ήταν σκόρπια στο κοντέινερ. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να τα τακτοποιήσει με τον τρόπο που ήταν αρχικά συσκευασμένα, αν ξέρετε ότι το πλήθος των σαπουνιών είναι 224;

2. Να γράψετε τον αριθμό 100 ως άθροισμα δύο προσθετέων, έτσι ώστε ο ένας να είναι πολλαπλάσιο του 7 και ο άλλος πολλαπλάσιο του 11. (Euler 1770).

3. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία, με ακέραιες συντεταγμένες, της ευθείας με εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$, όταν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{Z}$ με $(\alpha,\beta)|\gamma$.

4. Έστω $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^*$ με $(\alpha,\beta)=1$. Να αποδείξετε ότι
(i) Η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\alpha\beta$ δεν έχει θετικές ακέραιες λύσεις.
(ii) Η εξίσωση $\alpha x+\beta y=2\alpha\beta$ έχει μία μόνο θετική ακέραια λύση.

5. Να βρείτε δύο κλάσματα με παρονομαστές 7 και 13 και με άθροισμα $\frac{33}{91}$.

4.7 *ΙΣΟΫΠΟΛΟΙΠΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ*

Το ζήτημα της διαιρετότητας των ακεραίων είναι κυρίαρχο θέμα στη Θεωρία των Αριθμών. Μια έννοια που βοηθάει στη μελέτη και επίλυση προβλημάτων διαιρετότητας είναι η έννοια των **ισοϋπόλοιπων αριθμών**. Για να γίνει αντιληπτή η έννοια αυτή, ας εξετάσουμε, για παράδειγμα, τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των ακεραίων με τον αριθμό 5.
Από την ταυτότητα της αλγοριθμικής διαίρεσης γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός ακεραίου με το 5 είναι ένας από τους πέντε ακεραίους 0,1,2,3 και 4. Έτσι έχουμε

$0=0\cdot5+0$	$5=1\cdot5+0$	$-1=-1\cdot5+4$
$1=0\cdot5+1$	$6=1\cdot5+1$	$-2=-1\cdot5+3$
$2=0\cdot5+2$	$7=1\cdot5+2$	$-3=-1\cdot5+2$
$3=0\cdot5+3$	$8=1\cdot5+3$	$-4=-1\cdot5+1$
$4=0\cdot5+4$	$9=1\cdot5+4$	$-5=-1\cdot5+0$
	……….	$-6=-2\cdot5+4$
		$-7=-2\cdot5+3$
		……….

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 2,7,–3 διαιρούμενοι με 5 αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο 2. Λέμε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι *ισοϋπόλοιποι με μέτρο 5*. Ομοίως, λέμε ότι και οι αριθμοί 4,9,–1,–6 είναι *ισοϋπόλοιποι με μέτρο 5*, αφού διαιρούμενοι με 5 αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο 4. Γενικότερα, έχουμε:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω m ένας θετικός ακέραιος. Δύο ακέραιοι α και β λέγονται **ισοϋπόλοιποι με μέτρο m**, όταν διαιρούμενοι με m αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Για να δηλώσουμε ότι οι α και β είναι ισοϋπόλοιποι με μέτρο m, γράφουμε

$$\boldsymbol{\alpha\equiv\beta(\mathbf{mod}\,m)}$$

και διαβάζουμε “α ισοϋπόλοιπος του β μόντουλο m”. Αν ο ακέραιος α δεν είναι ισοϋπόλοιπος του β μόντουλο m, γράφουμε $\alpha\not\equiv\beta(\mathrm{mod}\,m)$. Έτσι, $22\equiv2(\mathrm{mod}\,5)$, ενώ $8\not\equiv5(\mathrm{mod}\,5)$.

Αν το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον m είναι υ, τότε προφανώς ισχύει

$$\boldsymbol{\alpha\equiv\upsilon(\mathbf{mod}\,m)}\,.$$

Από την ισότητα της ευκλείδειας διαίρεσης προκύπτει το επόμενο θεώρημα, με το οποίο μπορούμε να διαπιστώσουμε αν δυο αριθμοί είναι ισοϋπόλοιποι.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11

$\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\,m)$, αν και μόνον αν $m|(\alpha-\beta)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\,m)$, τότε από τις ευκλείδειες διαιρέσεις των α και β με το m έχουμε $\alpha=\kappa m+\upsilon$, $\beta=\lambda m+\upsilon$. Επομένως, $\alpha-\beta=(\kappa-\lambda)m$, που σημαίνει ότι $m|(\alpha-\beta)$.

Αντιστρόφως, αν $m|\alpha-\beta$, τότε $\alpha-\beta=\rho m$, δηλαδή $\alpha=\beta+\rho m$ για κάποιο ακέραιο ρ. Αν ο β διαιρούμενος με τον m δίνει πηλίκο κ και υπόλοιπο υ, τότε $\beta=\kappa m+\upsilon$, $0\leq\upsilon<m$. Επομένως, $\alpha=\kappa m+\upsilon+\rho m=(\kappa+\rho)m+\upsilon$, που σημαίνει ότι ο α διαιρούμενος με m δίνει υπόλοιπο επίσης υ. ■

Το συμβολισμό $\alpha\equiv\beta(\bmod m)$ τον εισήγαγε ο Gauss(1777-1855). Όπως εξήγησε ο ίδιος, υιοθέτησε το σύμβολο "≡", επειδή η σχέση $\alpha\equiv\beta(\bmod m)$ έχει ανάλογες ιδιότητες με την ισότητα.
Πράγματι, ως άμεσες συνέπειες του ορισμού των ισοϋπόλοιπων αριθμών προκύπτουν οι ιδιότητες:

- $\alpha\equiv\alpha(\bmod m)$ (ανακλαστική)
- Αν $\alpha\equiv\beta(\bmod m)$, τότε $\beta\equiv\alpha(\bmod m)$ (συμμετρική)
- Αν $\alpha\equiv\beta(\bmod m)$ και $\beta\equiv\gamma(\bmod m)$, τότε $\alpha\equiv\gamma(\bmod m)$ (μεταβατική).

Επίσης, ισχύει το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 12

Αν $\alpha\equiv\beta(\bmod m)$ και $\gamma\equiv\delta(\bmod m)$, τότε

- $\alpha+\gamma\equiv\beta+\delta(\bmod m)$
- $\alpha-\gamma\equiv\beta-\delta(\bmod m)$
- $\alpha\cdot\gamma\equiv\beta\cdot\delta(\bmod m)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε $\alpha-\beta=\kappa m$ και $\gamma-\delta=\lambda m$, όπου κ,λ ακέραιοι. Επομένως:
$(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)=(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)=\kappa m+\lambda m=(\kappa+\lambda)m$, που σημαίνει ότι

$$\alpha+\gamma\equiv\beta+\delta(\bmod m)$$

$(\alpha-\gamma)-(\beta-\delta)=(\alpha-\beta)-(\gamma-\delta)=\kappa m-\lambda m=(\kappa-\lambda)m$, που σημαίνει ότι

$$\alpha-\gamma\equiv\beta-\delta(\bmod m)$$

$(\alpha\gamma-\beta\delta)=\alpha\gamma-\beta\gamma+\beta\gamma-\beta\delta=(\alpha-\beta)\gamma-(\gamma-\delta)\beta=\kappa m\gamma-\lambda m\beta=(\kappa\gamma-\lambda\beta)m$, που σημαίνει ότι

$$\alpha\gamma\equiv\beta\delta(\bmod m).\quad ■$$

Η σχέση $\alpha\equiv\beta(\bmod m)$ λέγεται **ισοτιμία**.

Ως άμεση συνέπεια του θεωρήματος προκύπτει ότι:

Αν $\alpha\equiv\beta(\bmod m)$, τότε $\alpha+\gamma\equiv\beta+\gamma(\bmod m)$ και $\alpha\cdot\gamma\equiv\beta\cdot\gamma(\bmod m)$ για κάθε ακέραιο γ.

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται και για περισσότερες από δύο ισοτιμίες.

Δηλαδή

Αν $\boldsymbol{\alpha_1 \equiv \beta_1 (\mathrm{mod}\, m)}$, $\boldsymbol{\alpha_2 \equiv \beta_2 (\mathrm{mod}\, m), ..., \alpha_\nu \equiv \beta_\nu (\mathrm{mod}\, m)}$, **τότε**

$$\boldsymbol{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu \equiv \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\nu (\mathrm{mod}\, m)}$$

$$\boldsymbol{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_\nu \equiv \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot ... \cdot \beta_\nu (\mathrm{mod}\, m)}$$

Ιδιαίτερα:

Αν $\boldsymbol{\alpha \equiv \beta (\mathrm{mod}\, m)}$, **τότε** $\boldsymbol{\alpha^\nu \equiv \beta^\nu (\mathrm{mod}\, m)}$.

Ενώ, με πολλαπλασιασμό των μελών μιας ισοτιμίας με τον ίδιο ακέραιο προκύπτει πάλι ισοτιμία, δεν ισχύει το ίδιο και για τη διαίρεση. Για παράδειγμα, αν διαιρέσουμε τα μέλη της ισοτιμίας $14 \equiv 8 (\mathrm{mod}\, 6)$ με 2, δεν προκύπτει ισοτιμία. Πράγματι, $7 \not\equiv 4 (\mathrm{mod}\, 6)$.

Οι ισοτιμίες εμφανίζονται συχνά στην καθημερινή μας ζωή. Για παράδειγμα, ο ωροδείκτης των ρολογιών δείχνει την ώρα modulo 12 και ο χιλιομετρικός δείκτης των αυτοκινήτων δείχνει τα χιλιόμετρα που έχουμε διανύσει modulo 100.000. Έτσι, όταν η ώρα είναι 18, το ρολόι δείχνει 6, που είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του 18 με το 12, και όταν ένα αυτοκίνητο έχει διανύσει συνολικά 245.000 km, δείχνει 45.000 km, που είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του 245.000 με το 100.000.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Έστω $\boldsymbol{N = \alpha_\nu 10^\nu + \alpha_{\nu-1} 10^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} 10^{\nu-2} + ... + \alpha_1 10 + \alpha_0}$ **η δεκαδική παράστα-ση ενός θετικού ακέραιου** $\boldsymbol{N}$ **και** $\boldsymbol{S = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} + ... + \alpha_1 + \alpha_0}$ **το άθροι-σμα των ψηφίων του. Να αποδειχτούν τα κριτήρια διαιρετότητας:**

(i) $\boldsymbol{25 | N}$ **, αν και μόνο αν** $\boldsymbol{25 | \alpha_1 10 + \alpha_0}$.

(ii) $\boldsymbol{9 | N}$ **, αν και μόνο αν** $\boldsymbol{9 | S}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Προφανώς, $25 | \alpha_\nu 10^\nu + \alpha_{\nu-1} 10^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} 10^{\nu-2} + ... + \alpha_2 10^2$. Επομένως,

$$\alpha_\nu 10^\nu + \alpha_{\nu-1} 10^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} 10^{\nu-2} + ... + \alpha_2 10^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 25)$$

$$\alpha_\nu 10^\nu + \alpha_{\nu-1} 10^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} 10^{\nu-2} + ... + \alpha_2 10^2 + \alpha_1 10 + \alpha_0 \equiv \alpha_1 10 + \alpha_0 (\mathrm{mod}\, 25).$$

Δηλαδή, ένας ακέραιος διαιρείται με 25, αν και μόνο αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με 25.

(ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$10\equiv 1(\bmod 9)$$

$$10^{\kappa}\equiv 1^{\kappa}(\bmod 9),\ \text{για}\ \kappa=0,1,2,3,4,\ldots,\nu$$

$$10^{\kappa}\equiv 1(\bmod 9)$$

$$\alpha_{\kappa}10^{\kappa}\equiv \alpha_{\kappa}(\bmod 9).$$

Επομένως, $\alpha_0\equiv\alpha_0(\bmod 9)$, $\alpha_1 10\equiv\alpha_1(\bmod 9),\ldots,\alpha_\nu 10^{\nu}\equiv\alpha_\nu(\bmod 9)$. Προσθέτουμε τις ισοτιμίες κατά μέλη και έχουμε:

$$\alpha_\nu 10^{\nu}+\alpha_{\nu-1}10^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}10^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1 10+\alpha_0\equiv\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}+\ldots+\alpha_1+\alpha_0(\bmod 9),$$

δηλαδή $$N\equiv S(\bmod 9).$$

2. Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $3^{1999}+2^{1999}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε διαδοχικά:

$$3+2\equiv 0(\bmod 5)$$

$$3\equiv -2(\bmod 5)$$

$$3^{1999}\equiv(-2)^{1999}(\bmod 5)$$

$$3^{1999}\equiv -2^{1999}(\bmod 5).$$

Επομένως, $3^{1999}-(-2)^{1999}\equiv 0(\bmod 5)$, δηλαδή $3^{1999}+2^{1999}\equiv 0(\bmod 5)$.
Άρα $5|3^{1999}+2^{1999}$, που σημαίνει ότι ο αριθμός $3^{1999}+2^{1999}$ λήγει σε 0 ή σε 5. Όμως, ο αριθμός $3^{1999}+2^{1999}$ είναι περιττός ως άθροισμα ενός περιττού και ενός άρτιου και άρα λήγει σε 5.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνονται τα σύνολα $A=\{33,-17,23,35,41,-20\}$ και $B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.
Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία $\alpha\in A$ σε εκείνα τα στοιχεία $\beta\in B$ για τα οποία ισχύει $\beta\equiv\alpha(\bmod 7)$.

2. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

(i) $15\kappa+1\equiv 1(\bmod 3)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, (ii) $15\kappa+1\equiv -4(\bmod 5)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$,

(iii) $\kappa^2+5\equiv 1(\bmod 4)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$, (iv) $(m+1)^3\equiv 1(\bmod m)$, $m\in\mathbf{N}^*$.

3. Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους α για τους οποίους ισχύει $\alpha \equiv 6 \pmod{11}$.

4. Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους α για τους οποίους ισχύει
(i) $\alpha \equiv 2 \pmod 3$ και $\alpha \equiv 1 \pmod 4$ (ii) $\alpha \equiv 3 \pmod 4$ και $\alpha \equiv 4 \pmod 6$.

5. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης
(i) του 2^{100} με τον 7, (ii) του 9^{100} με τον 8
(ii) του 3^{1998} με τον 7, (iv) του 5^{2004} με τον 26.

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbf{N}^*$ ισχύει
(i) $8 | (5^{2\nu} + 7)$ (ii) $5 | (2^{\nu+1} + 3^{3\nu+1})$,
(iii) $15 | (2^{4\nu} - 1)$ (iv) $21 | (2^{2\nu+4} + 5^{2\nu+1})$

7. Να βρείτε
(i) το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 3^{1998}
(ii) τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού 7^{2003}.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $3\alpha^2 - 1$, όπου $\alpha \in \mathbf{Z}$, δεν είναι ποτέ τετράγωνο ακεραίου.

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πρώτο $p > 5$ ισχύει $10 | (p^2 - 1)$ ή $10 | (p^2 + 1)$.

3. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbf{Z}$ για τις οποίες ισχύει $5 | (\alpha^2 + \alpha - 6)$.

4. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbf{Z}$ για τις οποίες ισχύει $x \equiv 1 \pmod 2$ και $x \equiv 2 \pmod 3$.

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbf{Z}$ ισχύει
(i) $\alpha^3 \equiv \alpha \pmod 6$ (ii) $\alpha^5 \equiv \alpha \pmod{10}$.

6. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ και $m, n \in \mathbf{N}^*$. Να αποδείξετε ότι
(i) Αν $\alpha \equiv \beta \pmod m$ και $n | m$, τότε $\alpha \equiv \beta \pmod n$
(ii) Αν $n\alpha \equiv n\beta \pmod m$ και $(m, n) = 1$, τότε $\alpha \equiv \beta \pmod m$.

7. Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ και $m \in \mathbf{N}^*$ με $\alpha \equiv \beta \pmod m$, να αποδείξετε ότι $(\alpha, m) = (\beta, m)$.

8. Να αποδείξετε ότι:
(i) $39 | (53^{103} + 103^{53})$, (ii) $7 | (111^{333} + 333^{111})$.

9. Να αποδείξετε ότι:

(i) Για κάθε θετικό ακέραιο α ισχύει $\alpha^2 \equiv 0$ ή 1 ή 4(mod5).

(ii) Οι αριθμοί $\sqrt{5\nu+2}$ και $\sqrt{5\nu+3}$ είναι άρρητοι.

10. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πρώτο $p>3$ ισχύει $p^2 \equiv 1(\text{mod}3)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι αριθμοί p^2+2 και $p_1^2+p_2^2+p_3^2$ είναι σύνθετοι για όλους τους θετικούς πρώτους p, p_1, p_2, p_3 που είναι μεγαλύτεροι από τον 3.

11. Αν p,q είναι θετικοί πρώτοι με $p>q\geq 5$, να αποδείξετε ότι $24|(p^2-q^2)$.

12. Να βρείτε το ψηφίο των μονάδων των αριθμών 77^{77} και 333^{333}.

13. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{1999}+2^{1997}-1$ είναι σύνθετος.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι από ν διαδοχικούς ακεραίους ακριβώς ένας διαιρείται με το ν.

2. Να βρείτε τους θετικούς ακεραίους α,β,γ για τους οποίους ισχύει

$$\frac{\alpha+2}{8}=\frac{\beta+3}{6}=\frac{10}{\gamma+4}.$$

3. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\nu\geq 2$ διαδοχικών περιττών φυσικών είναι σύνθετος αριθμός.

4. Έστω α,β δύο θετικοί ακέραιοι, με $(\alpha,\beta)=1$. Να αποδείξετε ότι

(i) $(\alpha^2+\beta^2,\ \alpha\beta)=1$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\notin \mathbf{N}^*$, αν $\alpha\neq\beta$.

5. (i) Έστω α,β θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι

- Αν $(\alpha,\beta)=1$, τότε $(\alpha+\beta,\alpha\beta)=1$.
- $(\alpha+\beta,[\alpha,\beta])=(\alpha,\beta)$.

(ii) Να βρείτε τους θετικούς ακεραίους α,β για τους οποίους ισχύει $\alpha+\beta=114$ και $[\alpha,\beta]=360$.

6. Έστω p,q δύο θετικοί πρώτοι, διαφορετικοί μεταξύ τους. Να αποδείξετε ότι τα στοιχεία του συνόλου $S=\{\kappa p+\lambda q|\kappa,\lambda\in\mathbf{N}^*$ με $1\leq\kappa\leq q$ και $1\leq\lambda\leq p\}$ είναι διαφορετικά ανά δύο.

7. (i) Να αποδείξετε ότι $2^{\nu} > 2\nu$ για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 3$.

(ii) Να βρείτε τις θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $2^{x} = x^{2}$.

8. Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι $\alpha, \nu \geq 2$. Να αποδείξετε ότι

(i) Αν ο $\alpha^{\nu} - 1$ είναι πρώτος, τότε $\alpha = 2$ και ο ν είναι πρώτος.

(ii) Αν ο $\alpha^{\nu} + 1$ είναι πρώτος, τότε $\nu = 2^{\kappa}$ και ο α είναι πρώτος.

9. Να αποδείξετε ότι

(i) $\alpha^{2} \equiv 0 (\bmod 8)$ ή $\alpha^{2} \equiv 1 (\bmod 8)$ ή $\alpha^{2} \equiv 4 (\bmod 8)$.

(ii) Η εξίσωση $x^{2} + y^{2} = 1998$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.

10. (i) Να αποδείξετε ότι

$9^{10} \equiv 1 (\bmod 4)$, $9^{10} \equiv 1 (\bmod 25)$ και $9^{10} \equiv 1 (\bmod 100)$.

(ii) Να βρείτε τα δύο τελευταία ψηφία του 9^{2002}.

11. (i) Να βρείτε τους θετικούς ακέραιους $\nu > 2$ για τους οποίους ισχύει: $(\nu - 2) | 2\nu$.

(ii) Να βρείτε τα ορθογώνια με ακέραια μήκη πλευρών, των οποίων το εμβαδόν και η περίμετρος είναι αριθμητικά ίσα.

(iii) Έστω ένα σημείο A ενός επιπέδου. Για ποιες τιμές του ν ο χώρος γύρω από το A μπορεί να καλυφθεί με κανονικά ν-γωνα, τα οποία δεν έχουν κοινά εσωτερικά τους σημεία.

12. Να βρείτε ο εμβαδόν του τετραγώνου που μπορεί να χωριστεί σε 25 μικρότερα τετράγωνα, από τα οποία τα 24 έχουν πλευρά ίση με 1, ενώ το ένα έχει πλευρά με μήκος ακέραιο αριθμό διαφορετικό από 1.

13. Μπορείτε να γράψετε μερικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας καθένα από τα δέκα ψηφία $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$ μόνο μία φορά, ώστε το άθροισμα των αριθμών αυτών να είναι ίσο με 100.

14. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^{*}$, με $\alpha > \beta$, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

(i) $\alpha + \beta = 10$ και $(\alpha, \beta) = 2$, (ii) $\alpha\beta = 96$ και $(\alpha, \beta) = 4$,

(iii) $\alpha\beta = 96$ και $[\alpha, \beta] = 24$ (iv) $(\alpha, \beta) = 4$ και $[\alpha, \beta] = 24$,

(v) $\alpha + \beta = 7(\alpha, \beta)$ και $[\alpha, \beta] = 60$.

15. Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^{*}$, να αποδείξετε ότι $(\alpha^{2}, \beta^{2}) = (\alpha, \beta)^{2}$.

16. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^{*}$ με $(\alpha, \beta) = 1$. Αν το γινόμενο των α και β είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, να αποδείξετε ότι καθένας από τους α και β είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Η παρακάτω ισότητα είναι η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του α με το β:

(i) $38=(-11)(-3)+5$, αν $\alpha=38$ και $\beta=-11$ Α Ψ

(ii) $38=(-3)(-11)+5$, αν $\alpha=38$ και $\beta=-3$ Α Ψ

(iii) $-47=7(-7)+2$, αν $\alpha=-47$ και $\beta=7$. Α Ψ

2. (i) Το άθροισμα δύο άρτιων είναι άρτιος Α Ψ

(ii) Το άθροισμα δύο περιττών είναι περιττός Α Ψ

(iii) Το άθροισμα 10 περιττών είναι περιττός Α Ψ

(iv) Η εξίσωση $x(x+1)=1999$ έχει ακέραια λύση Α Ψ

(v) Υπάρχει ακέραιος α που να μπορεί να πάρει συγχρόνως τις μορφές $\alpha=3k+1$ και $\alpha=3\lambda+2$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbf{Z}$. Α Ψ

3. (i) Αν $\alpha|\beta\gamma$, τότε $\alpha|\beta$ ή $\alpha|\gamma$ Α Ψ

(ii) Αν $\beta\gamma|\alpha$, τότε $\beta|\alpha$ και $\gamma|\alpha$ Α Ψ

(iii) Αν $\alpha|(\beta+\gamma)$ και $\alpha|\beta$, τότε $\alpha|\gamma$ Α Ψ

(iv) Αν $\alpha|\beta^2$, τότε $\alpha|\beta$. Α Ψ

4. (i) Αν $3|\alpha$ και $4|\alpha$, τότε $12|\alpha$ Α Ψ

(ii) Αν $4|\alpha$ και $6|\alpha$, τότε $24|\alpha$. Α Ψ

5. (i) Αν $(\alpha,\beta)=(\alpha,\gamma)$, τότε $[\alpha,\beta]=[\alpha,\gamma]$ Α Ψ

(ii) Αν $(\alpha,\beta)=(\alpha,\gamma)$, τότε $(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha,\beta)$. Α Ψ

6. Υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbf{N}^*$, ώστε

(i) $\alpha+\beta=100$ και $(\alpha,\beta)=3$ Α Ψ

(ii) $\alpha+\beta=100$ και $(\alpha,\beta)=10$. Α Ψ

7. (i) Ο αριθμός 101 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο θετικών πρώτων Α Ψ

(ii) Αν $3|(\alpha^2+6\beta^2)$, τότε $3|\alpha$. Α Ψ

8. (i) Η εξίσωση $2x+4y=3$ έχει ακέραιες λύσεις Α Ψ

(ii) Η εξίσωση $x+2y=6$ έχει άπειρες θετικές ακέραιες λύσεις. Α Ψ

9. (i) Αν $2\alpha \equiv 2\beta (\bmod 4)$, τότε $\alpha \equiv \beta (\bmod 4)$ Α Ψ

(ii) Αν $2\alpha \equiv 2\beta (\bmod 3)$, τότε $\alpha \equiv \beta (\bmod 3)$ Α Ψ

(iii) Αν $\alpha^2 \equiv 1 (\bmod 3)$, τότε $\alpha \equiv 1 (\bmod 3)$ ή $\alpha \equiv -1 (\bmod 3)$. Α Ψ

- Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν $\alpha = 4 \cdot 6 + x$ είναι η ταυτότητα της διαίρεσης του α με τον 4 και $\beta = (x+1)6+3$ είναι η ταυτότητα της διαίρεσης του β με τον $(x+1)$, τότε

$A: x=0$, $B: x=1$, $\Gamma: x=2$, $\Delta: x=3$.

2. Αν $\alpha = 3\kappa + \upsilon$ είναι η ταυτότητα της διαίρεσης του α με τον 3 και ο α είναι άρτιος, τότε

A: κ περιττός και υ άρτιος B: κ άρτιος και υ περιττός

Γ: κ, υ άρτιοι ή κ, υ περιττοί

3. Αν $\delta = (4\nu + 3, 4\nu - 1)$, τότε

$A: \delta = 4$, $B: \delta = 2$, $\Gamma: \delta = 1$, Δ: Ο δ εξαρτάται από το ν.

4. Αν ο αριθμός $\boxed{x}\,2722\boxed{x}$ διαιρείται με τον 12, τότε

$A: x=1$, $B: x=4$, $\Gamma: x=7$, $\Delta: x=2$.

5. Αν $(\alpha, \beta) = 2^2 \cdot 3$, $(\beta, \gamma) = 2 \cdot 3^2$ και $(\gamma, \alpha) = 2 \cdot 3 \cdot 5$, τότε ο (α, β, γ) είναι

$A: 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $B: 2 \cdot 3$, $\Gamma: 2$, $\Delta: 3$.

6. Αν ο ν είναι περιττός, τότε ο ακέραιος

$A: 9^\nu + 1 \equiv 0 (\bmod 8)$, $B: 9^\nu + 1 \equiv 0 (\bmod 3)$

$\Gamma: 9^\nu + 1 \equiv 0 (\bmod 10)$, $\Delta: 9^\nu + 1 \equiv 0 (\bmod 4)$.

5 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

5.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Εισαγωγή

Η δημιουργία των μιγαδικών αριθμών οφείλεται στην προσπάθεια επίλυσης των εξισώσεων 3ου βαθμού. Αν στην $ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ θέσουμε $x=y-\dfrac{\beta}{3a}$ και εκτελέσουμε τις πράξεις, τότε προκύπτει μια εξίσωση της μορφής $x^3=px+q$. Στις αρχές του 16ου αιώνα οι Ιταλοί αλγεβριστές S. del Ferro και N. Tartaglia ανακάλυψαν μια μέθοδο επίλυσης τέτοιων εξισώσεων, που με σημερινό συμβολισμό ισοδυναμεί με τον τύπο

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\,, \quad \text{όπου} \quad D=\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^2.$$

Στην περίπτωση που η “διακρίνουσα” D είναι θετική, ο τύπος αυτός δίνει αμέσως μια ρίζα της εξίσωσης. Για παράδειγμα, στην $x^3=9x+28$ είναι $D=169$ και ο τύπος δίνει $x=4$, που είναι η μοναδική πραγματική ρίζα. Διαπιστώθηκε, όμως, τότε ένα φαινόμενο τελείως διαφορετικό από την περίπτωση των εξισώσεων 2ου βαθμού: Υπάρχουν εξισώσεις με πραγματικές ρίζες, όπως, για παράδειγμα, η $x^3=15x+4$, που έχει μια προφανή ρίζα το 4 (οι άλλες δύο είναι οι $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$), αλλά η διακρίνουσα D είναι αρνητική! Ο τύπος στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνει

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\,. \qquad (1)$$

Όπως είναι φανερό, οι μαθηματικοί βρέθηκαν, εδώ, μπροστά σε ένα δίλημμα: ή θα έπρεπε να εγκαταλείψουν τη μέθοδο των Ferro-Tartaglia ως γενική μέθοδο επίλυσης εξισώσεων 3ου βαθμού ή να δεχτούν ότι ένας συγκεκριμένος αριθμός, όπως το 4, μπορεί να εκφραστεί με παραστάσεις που περιέχουν τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών. Η δεύτερη άποψη φαινόταν αδιανόητη αλλά αυτό δεν εμπόδισε την εφαρμογή των αλγεβρικών πράξεων σε τέτοιες παραστάσεις. Στα μέσα του 16ου αιώνα ο R. Bombelli, κάνοντας τολμηρές υποθέσεις, βρήκε ότι ισχύει $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3=2+\sqrt{-121}$ και $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3=2-\sqrt{-121}$. Αντικαθιστώντας αυτές τις ισότητες στην (1) προκύπτει αμέσως ότι $x=4$, δηλαδή το αδιανόητο γίνεται πραγματικότητα! Οι αριθμοί της μορφής $a+\beta i$ με $i=\sqrt{-1}$, που ονομάστηκαν αρχικά φανταστικοί και αργότερα μιγαδικοί, έγιναν από τότε αναπόσπαστο εργαλείο των Μαθηματικών και των εφαρμογών τους στις άλλες επιστήμες. Ο J. Hadamard, ο οποίος το 1896 απέδειξε με χρήση της μιγαδικής ανάλυσης το "θεώρημα των πρώτων αριθμών", έγραψε ότι:

> "*Ο συντομότερος δρόμος ανάμεσα σε δύο αλήθειες στο πεδίο των πραγματικών περνά μέσα από το πεδίο των μιγαδικών*".

Το Σύνολο **C** *των Μιγαδικών Αριθμών*

Γνωρίζουμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση με αρνητική διακρίνουσα δεν έχει λύση στο σύνολο **R** των πραγματικών αριθμών. Ειδικότερα η εξίσωση $x^2=-1$ δεν έχει λύση στο σύνολο **R** των πραγματικών αριθμών, αφού το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός. Για να ξεπεράσουμε την "αδυναμία" αυτή, διευρύνουμε το σύνολο **R** σε ένα σύνολο **C,** το οποίο να έχει τις ίδιες πράξεις με το **R**, τις ίδιες ιδιότητες των πράξεων αυτών και στο οποίο να υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $x^2=-1$, δηλαδή ένα στοιχείο i, τέτοιο, ώστε $i^2=-1$. Σύμφωνα με τις παραδοχές αυτές το διευρυμένο σύνολο **C** θα έχει ως στοιχεία:

- Όλους τους πραγματικούς αριθμούς
- Όλα τα στοιχεία της μορφής βi, που είναι γινόμενα των στοιχείων του **R** με το i και
- Όλα τα αθροίσματα της μορφής $\alpha+\beta i$, με α και β πραγματικούς αριθμούς.

Τα στοιχεία του **C** λέγονται **μιγαδικοί αριθμοί** και το **C** **σύνολο των μιγαδικών αριθμών**. Επομένως:

> Το σύνολο **C** των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου **R** των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:
> - Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, έτσι ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο **R**, με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού,
> - Υπάρχει ένα στοιχείο ***i***, τέτοιο, ώστε $\boldsymbol{i^2=-1}$,
> - Κάθε στοιχείο z του **C** γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in$**R**.

Η έκφραση $\alpha+\beta i, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ είναι ακριβώς ό,τι λέμε **μιγαδικό αριθμό**. Είναι η σύνθεση δύο αριθμών, του πραγματικού α και του βi, τον οποίο ονομάζουμε **φανταστικό αριθμό**. Ο α λέγεται **πραγματικό μέρος** του z και σημειώνεται $\mathbf{Re(z)}$, ενώ ο β λέγεται **φανταστικό μέρος** του z και σημειώνεται $\mathbf{Im(z)}$. Επιπλέον, στο **C** κάθε πραγματικός αριθμός α εκφράζεται ως $\alpha+0i$, ενώ κάθε φανταστικός αριθμός βi εκφράζεται ως $0+\beta i$. Στη συνέχεια, όταν λέμε ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$, εννοούμε ότι οι α και β είναι πραγματικοί αριθμοί και το γεγονός αυτό δε θα τονίζεται ιδιαίτερα.

Ισότητα Μιγαδικών Αριθμών

Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $\alpha+\beta i$, δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$**,** δηλαδή:

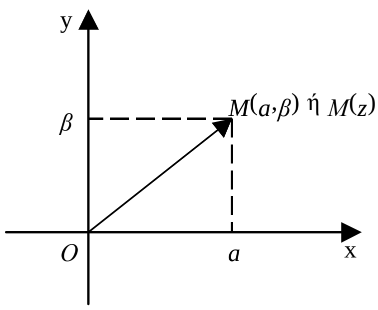
$$\boxed{\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta.}$$

Επομένως,

$$\boxed{\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ και } \beta=0.}$$

Μετά τον ορισμό της ισότητας μιγαδικών αριθμών δημιουργείται το ερώτημα αν διατάσσονται οι μιγαδικοί αριθμοί. Γνωρίζουμε ότι κατά την επέκταση από το **N** στο **Z**, οι πράξεις, η διάταξη και οι ιδιότητες αυτών, οι οποίες ισχύουν στο **N** μεταφέρονται και στο **Z**. Τα ίδια συμβαίνουν και για τις επεκτάσεις από το **N** στο **Q** και από το **Q** στο **R**. Στην επέκταση όμως από το **R** στο **C**, ενώ οι πράξεις και οι ιδιότητες αυτών, που ισχύουν στο **R** εξακολουθούν να ισχύουν και στο **C**, δε μεταφέρεται η διάταξη και οι ιδιότητές της.

Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών



Σε κάθε μιγαδικό αριθμό $\alpha+\beta i$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και *αντιστρόφως*, σε κάθε σημείο $M(\alpha,\beta)$ του καρτεσιανού αυτού επιπέδου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το μιγαδικό $\alpha+\beta i$. Το σημείο M λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού $\alpha+\beta i$. Αν θέσουμε $z=\alpha+\beta i$, τότε το σημείο $M(\alpha,\beta)$ μπορούμε να το συμβολίζουμε και με $M(z)$.

Ένα επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα αναφέρεται ως **μιγαδικό επίπεδο**. Ο άξονας $x'x$ λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(\alpha,0)$, που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών $\alpha=\alpha+0i$. Επίσης, ο άξονας $y'y$ λέγεται **φανταστικός** άξονας, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(0,\beta)$, που είναι εικόνες των φανταστικών $\beta i=0+\beta i$

Ένας μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$ παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα $\vec{OM}$ του σημείου $M(\alpha,\beta)$.

5.2 *ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ* **C** *ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ*

Σύμφωνα με τον ορισμό του **C**, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι αντίστοιχες πράξεις με διώνυμα $\alpha+\beta x$ στο **R**, όπου βέβαια αντί για x έχουμε το i. Έτσι:

- Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}\,.$$

Για παράδειγμα, $(3+4i)+(5-6i)=(3+5)+(4-6)i=8-2i$.

- Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma+\delta i$ από τον $\alpha+\beta i$, επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού $\gamma+\delta i$ είναι ο μιγαδικός $-\gamma-\delta i$, έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha+\beta i)+(-\gamma-\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i\,.$$

Δηλαδή

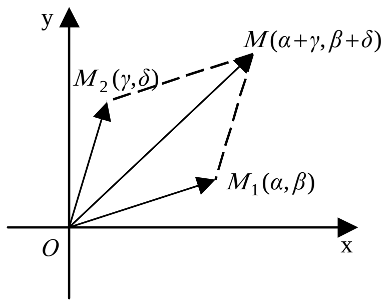
$$\boldsymbol{(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i}\,.$$

Για παράδειγμα $(3+4i)-(5-6i)=(3-5)+(4+6)i=-2+10i$.

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$.



Επομένως, ισχύει $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:

“Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους”.

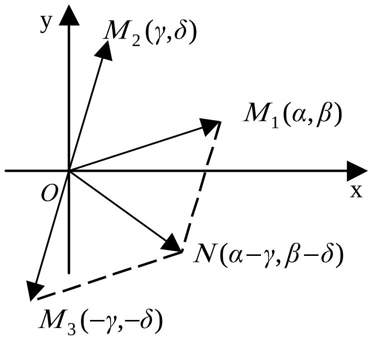
Επίσης, η διαφορά

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο

$$N(\alpha-\gamma,\beta-\delta).$$

Επομένως, ισχύει $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:



“Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους”.

- Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha(\gamma+\delta i)+\beta i(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+(\beta i)(\delta i)=$$
$$=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i.$$

Δηλαδή,

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i}.$$

Για παράδειγμα,

$$(3+4i)\cdot(5-6i)=15-18i+20i-24i^2=(15+24)+(20-18)i=39+2i.$$

Ειδικότερα, έχουμε: $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$. Ο αριθμός $\alpha-\beta i$ λέγεται **συζυγής** του $\alpha+\beta i$ και συμβολίζεται με $\overline{\alpha+\beta i}$. Δηλαδή,

$$\boxed{\overline{\alpha+\beta i}=\alpha-\beta i}.$$

Επειδή είναι και $\overline{\alpha-\beta i}=\alpha+\beta i$, οι $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

- Τέλος, για να εκφράσουμε το πηλίκο $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, στη μορφή $\kappa+\lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

Δηλαδή,
$$\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i}.$$

Για παράδειγμα: $\frac{2+i}{1-3i}=\frac{(2+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{2+6i+i+3i^2}{1+9}=\frac{-1+7i}{10}=-\frac{1}{10}+\frac{7}{10}i$.

Δύναμη Μιγαδικού

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού αριθμού z με εκθέτη ακέραιο ορίζονται ακριβώς όπως και στους πραγματικούς, δηλαδή ορίζουμε:

$$z^1=z,\ z^2=z\cdot z, \ldots,\ \text{και γενικά}\ z^\nu=z^{\nu-1}\cdot z,$$

για κάθε θετικο ακέραιο ν, με $\nu>1$. Επίσης, αν $z\neq 0$, ορίζουμε

$$z^0=1,\ z^{-\nu}=\frac{1}{z^\nu}\ \text{για κάθε θετικό ακέραιο}\ \nu.$$

Για τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν και για τις δυνάμεις των πραγματικών αριθμών. Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις του i έχουμε:

$$i^0=1,\quad i^1=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=i^2 i=-i.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι είναι:

$$i^4=i^2i^2=1,\ i^5=i^4i=1\cdot i=i,\ i^6=i^4i^2=1\cdot i^2=-1,\ i^7=i^4i^3=1\cdot i^3=-i,$$

δηλαδή, μετά το i^4 οι τιμές του i^ν επαναλαμβάνονται. Άρα, για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $\nu=4\rho+\upsilon$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχουμε:

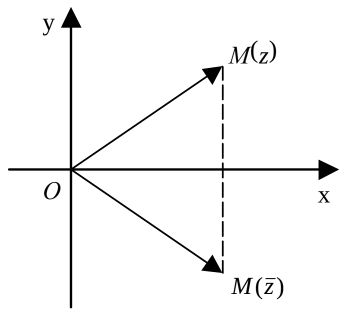
$$i^\nu=i^{4\rho+\upsilon}=i^{4\rho}i^\upsilon=(i^4)^\rho i^\upsilon=1^\rho i^\upsilon=i^\upsilon=\begin{cases}1, & \text{αν}\ \upsilon=0\\ i, & \text{αν}\ \upsilon=1\\ -1, & \text{αν}\ \upsilon=2\\ -i, & \text{αν}\ \upsilon=3\end{cases}$$

Για παράδειγμα:

$$i^{14} = i^{3\cdot 4+2} = i^2 = -1$$
$$i^{19} = i^{4\cdot 4+3} = i^3 = -i$$
$$i^{16} = i^{4\cdot 4+0} = i^0 = 1$$
$$i^{21} = i^{4\cdot 5+1} = i^1 = i\,.$$

Ιδιότητες Συζυγών

Επειδή οι συζυγείς μιγαδικοί, όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, μας διευκολύνουν στη μελέτη των μιγαδικών αριθμών, θα αναφερθούμε ιδιαιτέρως σε αυτούς.



- Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha,\beta)$ και $M'(\alpha,-\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

- Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ μπορούμε εύκολα, με εκτέλεση των πράξεων, να διαπιστώσουμε ότι:

$$z+\bar{z}=2\alpha$$
$$z-\bar{z}=2\beta i\,.$$

- Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

1.	$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$
2.	$\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$
3.	$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$
4.	$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\,.$

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα έχουμε:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}$$

$$= (\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i = (\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i) = \bar{z}_1+\bar{z}_2 .$$

Οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν και για περισσότερους από δυο μιγαδικούς αριθμούς. Είναι δηλαδή:

$$\overline{\boldsymbol{z_1+z_2+\ldots+z_\nu}} = \boldsymbol{\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_\nu}$$
$$\overline{\boldsymbol{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu}} = \boldsymbol{\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot\ldots\cdot\bar{z}_\nu} .$$

Ιδιαίτερα, αν είναι $z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu = z$, τότε η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$\overline{(\boldsymbol{z^\nu})} = (\boldsymbol{\bar{z}})^\nu$$

Για παράδειγμα, $$\overline{\left[\left(\frac{2-3i}{4+5i}\right)^3\right]} = \left[\overline{\left(\frac{2-3i}{4+5i}\right)}\right]^3 = \left(\frac{2+3i}{4-5i}\right)^3 .$$

Επίλυση της Εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha z^2+\beta z+\gamma=0}$ **με** $\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}}$, $\boldsymbol{\alpha\neq 0}$

Επειδή $i^2=-1$ και $(-i)^2=i^2=-1$, η εξίσωση $z^2=-1$ έχει στο σύνολο **C** των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις $z_1=i$ και $z_2=-i$. Ομοίως, η εξίσωση $z^2=-4$ έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις $z_1=2i$ και $z_2=-2i$, αφού

$$z^2=-4 \Leftrightarrow z^2=i^2\cdot 4 \Leftrightarrow z^2=(2i)^2 \Leftrightarrow z=2i \text{ ή } z=-2i .$$

Εύκολα όμως μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο **C**. Πράγματι, έστω η εξίσωση

$$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0, \quad \text{με} \quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R},\ \alpha\neq 0 .$$

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο **R** και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2},$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

- $\varDelta=0$. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- $\varDelta<0$. Τότε, επειδή $\dfrac{\varDelta}{4\alpha^2}=\dfrac{(-1)(-\varDelta)}{4\alpha^2}=\dfrac{i^2(\sqrt{-\varDelta})^2}{(2\alpha)^2}=\left(\dfrac{i\sqrt{-\varDelta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση

γράφεται: $\left(z+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\dfrac{i\sqrt{-\varDelta}}{2\alpha}\right)^2$.

Άρα οι λύσεις της είναι:

$$z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\varDelta}}{2\alpha}, \qquad (1)$$

οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Για παράδειγμα, η εξίσωση $z^2-5z+6=0$ έχει $\varDelta=25-24=1>0$ και οι λύσεις της είναι: $z_1=\dfrac{5+1}{2}=3$, $z_2=\dfrac{5-1}{2}=2$. Όμως, η εξίσωση $z^2-2z+2=0$ έχει $\varDelta=4-8=-4<0$ και οι λύσεις της είναι οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί: $z_1=\dfrac{2+i\sqrt{4}}{2}=1+i$, $z_2=\dfrac{2-i\sqrt{4}}{2}=1-i$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι και εδώ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boldsymbol{z_1+z_2=\frac{-\beta}{\alpha}} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{z_1z_2=\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου ν να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\boldsymbol{S=i+i^2+i^3+\ldots+i^\nu}.$$

ΛΥΣΗ

Οι προσθετέοι του αθροίσματος έχουν πλήθος ν και είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο i και λόγο επίσης i. Επομένως, $S=i\dfrac{i^\nu-1}{i-1}$, οπότε, λόγω της ισότητας $\nu=4\rho+\upsilon$ της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\upsilon=0$. Τότε $\nu=4\rho$, οπότε $S=i\dfrac{1-1}{i-1}=0$
- $\upsilon=1$. Τότε $\nu=4\rho+1$, οπότε $S=i\dfrac{i-1}{i-1}=i$

- $\upsilon=2$. Τότε $\nu=4\rho+2$, οπότε $S=i\dfrac{-1-1}{i-1}=\dfrac{-2i}{i-1}=\dfrac{2i}{1-i}=\dfrac{2i(1+i)}{2}=-1+i$
- $\upsilon=3$. Τότε $\nu=4\rho+3$, οπότε $S=i\dfrac{-i-1}{i-1}=\dfrac{1-i}{i-1}=-1$.

2. Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός $\dfrac{z-1}{z-2i}$ είναι α) φανταστικός β) πραγματικός.

ΛΥΣΗ

Αν $z=x+yi$, τότε

$$\frac{z-1}{z-2i}=\frac{(x-1)+yi}{x+(y-2)i}$$

$$=\frac{(x^2-x+y^2-2y)+i(2x+y-2)}{x^2+(y-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}+\frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2}i.$$

Επομένως:

α) Ο αριθμός $\dfrac{z-1}{z-2i}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $\dfrac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}=0$, δηλαδή, αν και μόνο αν $x^2-x+y^2-2y=0$ και $x^2+(y-2)^2\neq 0$ ή ισοδύναμα

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4} \quad \text{και} \quad (x,y)\neq(0,2).$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ και ακτίνα $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο $A(0,2)$.

β) Ο αριθμός $\dfrac{z-1}{z-2i}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $\dfrac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2}=0$, δηλαδή, αν και μόνο αν

$$2x+y-2=0 \quad \text{και} \quad x^2+(y-2)^2\neq 0.$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $2x+y-2=0$, με εξαίρεση το σημείο $A(0,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$, ώστε ο $z = (\lambda + 3i)(2 - i)$ να είναι:
α) πραγματικός αριθμός β) φανταστικός αριθμός.

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει:

α) $(x+y)+(x-y)i = 3-i$

β) $\sqrt{3x^2+x-6}+(x^2-3)i = 2+i$

γ) $9-27i = (3x+2y)-yi$.

3. Στο μιγαδικό επίπεδο να σημειώσετε τις εικόνες και τις διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών αριθμών: $1+i$, 1, i, $-2i$, $3+4i$, $3-4i$, 5, 0.

4. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

α) Το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με μηδέν.
β) Το φανταστικό μέρος του z είναι ίσο με μηδέν.
γ) Το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με το φανταστικό του μέρος.

5. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $\alpha+\beta i$

α) $(-4+6i)+(7-2i)$ β) $(3-2i)-(6+4i)$

γ) $(3+4i)+(-8-7i)+(5+3i)$ δ) $(3+2i)(4+5i)$

ε) $3i(6+i)$ στ) $(4+3i)(4-3i)$

ζ) $i(3+i)(2-i)$.

6. Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στη μορφή $\alpha+\beta i$:

α) $\dfrac{1}{1-i}$ β) i^6 γ) i^2+2i+1 δ) $(1+i\sqrt{3})^2$ ε) $\dfrac{3+i}{2-i}$ στ) $\dfrac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$.

7. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbf{R}$, για τους οποίους ισχύει:

α) $(3-2i)^2-(x+iy) = x-yi$

β) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2+\dfrac{1}{x+iy} = 1+i$

γ) $(3-2i)(2x-iy) = 2(2x-iy)+2i-1$.

8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$ β) $\dfrac{1}{i^{11}}-\dfrac{1}{i^{41}}+\dfrac{1}{i^{75}}-\dfrac{1}{i^{1023}}$.

9. Ποιος είναι ο $\bar{z}$, όταν:

α) $z=-5+7i$ β) $z=-4-9i$ γ) $z=4i$
δ) $z=11$ ε) $z=-i$ στ) $z=0$.

10. Με ποιες συμμετρίες μπορούν να προκύψουν από την εικόνα του μιγαδικού $z = x+yi$ οι εικόνες των μιγαδικών $\bar{z}$, $-z$ και $-\bar{z}$;

11. Αν $z_1 = \dfrac{5-9i}{7+4i}$ και $z_2 = \dfrac{5+9i}{7-4i}$, να δείξετε ότι ο $z_1 + z_2$ είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο $z_1 - z_2$ φανταστικός αριθμός.

12. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

α) $z - \bar{z} = 6i$ β) $z^2 = \bar{z}^2$ γ) $\bar{z}^2 = -z^2$ δ) $\bar{z} = 2 - z$

13. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 3x + 2 = 0$ β) $x^2 - 2x + 3 = 0$ γ) $x + \dfrac{1}{x} = 1$.

14. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$, είναι $3+2i$, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν α, β, γ και δ είναι πραγματικοί αριθμοί, να εξετάσετε πότε το πηλίκο $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ είναι πραγματικός αριθμός.

2. Αν $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\dfrac{1}{z^2 - z}$.

3. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(1+i)^{20} - (1-i)^{20}$.

4. Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $i^{\nu} + i^{-\nu}$;

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $\bar{z} = z^2$ β) $\bar{z} = z^3$.

6. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 0$. Να δείξετε ότι ο $\dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός και ότι $-2 \leq \dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z} \leq 2$.

7. Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta i)^{10} + (\beta - \alpha i)^{10} = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

8. α) Για ένα μιγαδικό αριθμό z να αποδείξετε ότι:

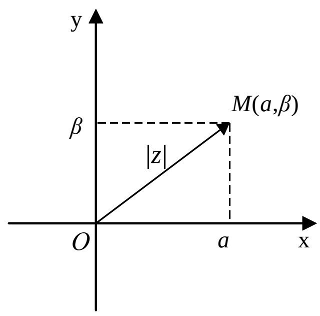
- Ο z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z = \bar{z}$
- Ο z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z = -\bar{z}$.

β) Αν $\bar{z}_1=\frac{1}{z_1}$ και $\bar{z}_2=\frac{1}{z_2}$ και $z_1\cdot z_2\neq -1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός $v=\frac{z_1-z_2}{1+z_1z_2}$ είναι φανταστικός.

9. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: α) $\mathrm{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right)=5\mathrm{Re}(z)$ β) $\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)=-3\mathrm{Im}(z)$.

5.3 ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Έστω $M(\alpha,\beta)$ η εικόνα του μιγαδικού $z=\alpha+\beta i$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή O, δηλαδή



$$\boxed{|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

Για παράδειγμα, $|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

Όταν ο μιγαδικός z είναι της μορφής $z=\alpha+0i=\alpha\in\mathbb{R}$, τότε $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=|\alpha|$, που είναι η γνωστή μας απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού α.

Αν $z=\alpha+\beta i$, τότε $\bar{z}=\alpha-\beta i$ και $-z=-\alpha-\beta i$, επομένως,

- $|z|=|\bar{z}|=|-z|$
- $|z|^2=z\cdot\bar{z}$

Οι επόμενες ιδιότητες αναφέρονται στις σχέσεις που συνδέουν το γινόμενο και το πηλίκο μιγαδικών με τα μέτρα τους και είναι ίδιες με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απόλυτων τιμών πραγματικών αριθμών.

Αν z_1,z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

- $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

Πράγματι, έχουμε:

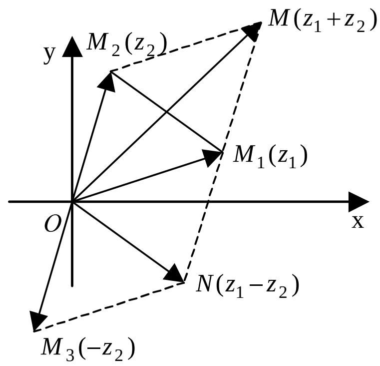
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$
$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$
$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2, \qquad \text{που ισχύει.}$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ιδιότητα.
Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$\boldsymbol{|z_1 z_2 \ldots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_\nu|}$$

και ειδικότερα

$$\boldsymbol{|z^\nu| = |z|^\nu}.$$



Τέλος, από τη γνωστή μας τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $z_1 + z_2$ και της διαφοράς $z_1 - z_2$ δύο μιγαδικών προκύπτει ότι:

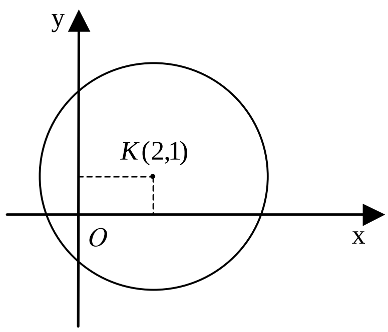
$$\boxed{||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$$

Επίσης, είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ON}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2 M_1}$. Επομένως:

“Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους”.

Δηλαδή:

$$\boxed{(M_1 M_2) = |z_1 - z_2|}$$



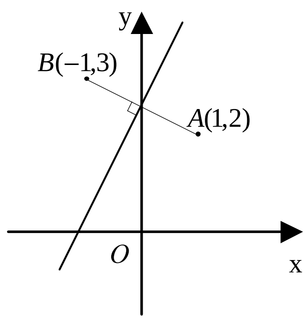
Έτσι, για παράδειγμα, η εξίσωση $|z-(2+i)|=3$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από την εικόνα του μιγαδικού $2+i$, δηλαδή από το σημείο $K(2,1)$ του μιγαδικού επιπέδου, απόσταση 3 μονάδες και μόνο από αυτούς. Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K(2,1)$ και ακτίνα $\rho=3$.

Γενικά, η εξίσωση

$$\boldsymbol{|z - z_0| = \rho, \quad \rho > 0}$$

παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ.

Επίσης η εξίσωση $|z-(1+2i)|=|z-(-1+3i)|$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να ισαπέχουν από τις εικόνες των μιγαδικών $1+2i$ και $-1+3i$, δηλαδή από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(-1,3)$, και μόνο από αυτούς. Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB.



Γενικά, η εξίσωση

$$|z-z_1|=|z-z_2|$$

παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, ..., z_\nu$ ισχύει

$$\left|\frac{z_1-i}{z_1+i}\right|+\left|\frac{z_2-i}{z_2+i}\right|+...+\left|\frac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right|<1,$$

να αποδειχτεί ότι κανένας από αυτούς δεν είναι πραγματικός αριθμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ένας από τους $z_1, z_2, ..., z_\nu$, για παράδειγμα ο z_κ, ήταν πραγματικός, τότε οι μιγαδικοί $z_\kappa - i$ και $z_\kappa + i$ θα ήταν συζυγείς και επομένως $\left|\frac{z_\kappa-i}{z_\kappa+i}\right|=\frac{|z_\kappa-i|}{|z_\kappa+i|}=1$, αφού
τα μέτρα δύο συζυγών μιγαδικών είναι ίσα. Τότε όμως θα είχαμε

$$\left|\frac{z_1-i}{z_1+i}\right|+\left|\frac{z_2-i}{z_2+i}\right|+...+\left|\frac{z_\kappa-i}{z_\kappa+i}\right|+...+\left|\frac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right|\geq 1,$$

που είναι άτοπο.

2. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z-(2+2i)|=\sqrt{2}$, να βρεθεί:

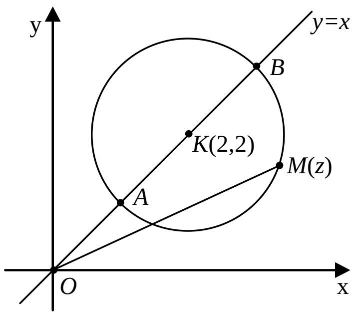
α) Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z στο μιγαδικό επίπεδο.

β) Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

ΛΥΣΗ

α) Η ισότητα $|z-(2+2i)|=\sqrt{2}$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από το σημείο $K(2,2)$ σταθερή απόσταση ίση με $\sqrt{2}$ και μόνο από αυτούς. Επομένως, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $K(2,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$, δηλαδή ο κύκλος

$$(x-2)^2+(y-2)^2=2 .$$



β) Το $|z|$ είναι η απόσταση της εικόνας $M(z)$ από την αρχή $O(0,0)$, δηλαδή το μήκος (OM). Από τη Γεωμετρία, όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο στα A και B, τότε $(OA)\le(OM)\le(OB)$, που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το μήκος (OB) και η ελάχιστη το μήκος (OA).

Η εξίσωση, όμως, της ευθείας OK είναι η $y=x$. Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων A και B θα είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=2\\ \hfill y=x\end{cases},$$

που είναι τα ζεύγη $(1,1)$ και $(3,3)$. Άρα, η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι ίση με $(OB)=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ και η ελάχιστη ίση με $(OA)=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

$1+i$, $1-i$, $3+4i$, $3-4i$, $-5i$, -4, $\dfrac{1+i}{1-i}$,

$(1-i)^2\cdot(1+i)^4$, $(2-i)\cdot(1+2i)$ και $\dfrac{3+i}{4-3i}$.

2. Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

$(1+i)^2$, $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$, $\left(\dfrac{\lambda+\mu i}{\lambda-\mu i}\right)^2$, όπου $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ με $|\lambda|+|\mu|\ne 0$.

3. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z=x+yi$ για τους οποίους ισχύει:

α) $|z^2|=z^2$ β) $|z-1|=z$ γ) $|z+i|=2\bar{z}$.

4. Να βρείτε πού ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει:

α) $|z|=1$ β) $|z-i|=1$ γ) $|z+1+2i|=3$ δ) $1<|z|<2$ ε) $|z|\ge 2$.

5. Να βρείτε πού ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

α) $|z+1|=|z-2i|$ β) $|z-i|>|z+1|$

6. Αν $x \in \mathbf{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z, όπου $z=\dfrac{1+xi}{x+i}$.

7. Από τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύει $|z-4i|=2$, ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο;

8. Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z|=1$, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w=2z+1$.

9. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει:

$$\sqrt{2}\cdot|z|\geq|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|.$$

2. Έστω ο μιγαδικός z, για τον οποίο ισχύει $z \neq -1$. Να αποδείξετε ότι:
Αν $|z|=1$, τότε ο $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός αριθμός και αντιστρόφως.

3. Έστω ο μιγαδικός z με $z\neq 0$. Να αποδείξετε ότι: Ο $w=z+\dfrac{1}{z}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός ή $|z|=1$.

4. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq \alpha i$, όπου $\alpha \in \mathbf{R}^*$. Να αποδείξετε ότι: ο $w=\dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

5. Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=1$, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w=\dfrac{2z-i}{iz+2}$.

6. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|2z-1|=|z-2|$, να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

7. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z|=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|1+z|^2+|1-z|^2$. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα.

8. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει: $|z+1|=|z+4i|$. Ποιο από τα σημεία M απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή $O(0,0)$.

9. Αν M_1 και M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως και $z_2 = z_1 + \frac{4}{z_1}$, να αποδείξετε ότι: Όταν το M_1 κινείται σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 4, τότε το M_2 κινείται σε μια έλλειψη.

10. α) Αν $|z|=1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

β) Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, ..., z_\kappa$ ισχύει $|z_1|=|z_2|= ... =|z_\kappa|=1$, να αποδείξετε ότι: $|z_1+z_2+...+z_\kappa| = \left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+...+\frac{1}{z_\kappa}\right|$.

5.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

Εισαγωγή

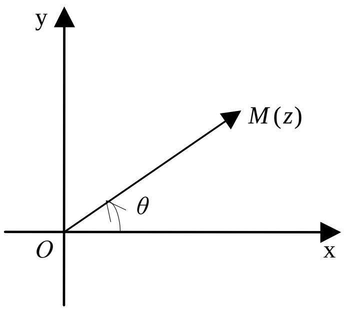
Η αποδοχή των μιγαδικών αριθμών, εκτός από τις δυνατότητες που άνοιξε στην επίλυση των εξισώσεων, έδωσε μεγάλη ευελιξία στον αλγεβρικό λογισμό. Για παράδειγμα, η παράσταση x^2+y^2 μπορεί τώρα να παραγοντοποιηθεί στη μορφή $(x+yi)(x-yi)$. Οι μαθηματικοί εκμεταλλεύτηκαν αυτό το γεγονός σε πολλά ζητήματα, όπως είναι, για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση των τόξων ενός κύκλου. Το 1739 ο A. de Moivre, συνδυάζοντας τον υπολογισμό των κυβικών ριζών παραστάσεων της μορφής $a+i\sqrt{\beta}$ (που εμφανίζονται στον τύπο επίλυσης της $x^3=px+q$) με την τριγωνομετρική ταυτότητα $3ημθ-4ημ^3θ=ημ3θ$, έδωσε τις πρώτες ιδέες για την τριγωνομετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών. Το 1748 ο L. Euler, ξεκινώντας από την ανάλυση της ισότητας $συν^2θ+ημ^2θ=1$ στη μορφή $(συνθ+iημθ)(συνθ-iημθ)=1$, τόνισε τη σημασία των παραστάσεων της μορφής $συνθ+iημθ$ και έδειξε ότι $(συνx+iημx)(συνy+iημy)= συν(x+y)+$ $+iημ(x+y)$. Γενικεύοντας έφτασε στη σχέση $(συνz \pm iημz)^n = συνnz \pm iημnz$

(που σήμερα φέρει το όνομα του de Moivre), από την οποία, με χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος, βρήκε τύπους για τα ημnz και συνnz.

Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις οι μιγαδικοί αντιμετωπίζονταν ως καθαρά συμβολικές παραστάσεις, που δεν απεικόνιζαν κάποια συγκεκριμένη πραγματικότητα. Η τριγωνομετρική παράσταση έδωσε όμως τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν (από τον C. Wessel το 1799 και τον R. Argand το 1806) για την αναλυτική έκφραση της διεύθυνσης στο επίπεδο, ακριβώς όπως οι θετικοί και αρνητικοί χρησιμοποιούνται για τη διάκριση της φοράς στην ευθεία. Αυτές οι εξελίξεις διεύρυναν τις εφαρμογές των μιγαδικών και άνοιξαν το δρόμο για τη γεωμετρική ερμηνεία τους, την οποία καθιέρωσε ο C.F. Gauss το 1831.

Όρισμα Μιγαδικού

Έστω ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ και $\vec{OM}$ η αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα του.



Ονομάζουμε **όρισμα** του μιγαδικού z καθεμιά από τις γωνίες που έχουν αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία OM.

Από όλα τα ορίσματα του z ένα ακριβώς βρίσκεται στο διάστημα $[0,2\pi)$. Αυτό λέγεται **πρωτεύον όρισμα** του μιγαδικού z και συμβολίζεται με $\boldsymbol{Arg(z)}$. Είναι φανερό ότι:

- Το $Arg(z)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z με τον άξονα $x'x$.

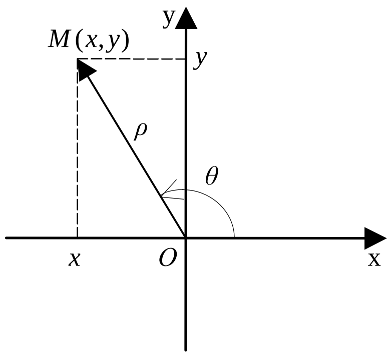
- Δύο ορίσματα του z διαφέρουν κατά γωνία $2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbf{Z}$.

Για το μιγαδικό $z = 0$ δεν ορίζεται όρισμα. Γι'αυτό, στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε όρισμα μιγαδικού, θα εννοούμε ότι $z \neq 0$.

Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού

Έστω ο μιγαδικός $z = x + yi \neq 0$, που έχει μέτρο $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ και ένα όρισμά του είναι το θ. Από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθοκανονικό σύστημα έχουμε:

$$x = \rho συνθ$$
$$y = \rho ημθ$$



Επομένως, ο μιγαδικός z μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$z = x + yi = \rho συνθ + \rho ημθ \cdot i,$$

δηλαδή

$$\boxed{z = \rho(συνθ + iημθ)}$$

Ο τρόπος αυτός γραφής του μιγαδικού z λέγεται **τριγωνομετρική** ή **πολική μορφή του** z.

Για παράδειγμα, αν $z = -\sqrt{3} + i$, τότε το μέτρο του z είναι $\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ και για κάθε όρισμά του θ ισχύουν:

$$συνθ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad ημθ = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, μια τιμή του ορίσματος είναι η $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Άρα, έχουμε $z = 2\left(συν\frac{5\pi}{6} + iημ\frac{5\pi}{6}\right)$ ή γενικότερα:

$$z = 2\left[συν\left(2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + iημ\left(2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\right], \quad \kappa \in \mathbf{Z}.$$

Αποδεικνύεται ότι αν $\lambda > 0$ και $z = \lambda(συνθ + iημθ)$, τότε η παράσταση $\lambda(συνθ + iημθ)$ είναι τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού z.
Επειδή ίσοι μιγαδικοί αριθμοί έχουν την ίδια εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο και αντιστρόφως, έχουμε το ακόλουθο κριτήριο ισότητας μιγαδικών:

“Δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2*π*”.

Δηλαδή:

Αν $z_1 = \rho_1(συνθ_1 + iημθ_1)$ και $z_2 = \rho_2(συνθ_2 + iημθ_2)$ είναι οι τριγωνομετρικές μορφές των μιγαδικών z_1 και z_2, τότε:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\rho_1 = \rho_2 \quad \text{και} \quad \theta_1 - \theta_2 = \kappa \cdot 2\pi,\ \kappa \in \mathbf{Z}).$$

Τριγωνομετρική Μορφή Γινομένου Μιγαδικών

Αν $z_1=\rho_1(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)$ και $z_2=\rho_2(\text{συν}\theta_2+i\text{ημ}\theta_2)$ είναι οι τριγωνομετρικές μορφές δύο μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2, τότε για το γινόμενό τους έχουμε:

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=\rho_1(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)\cdot\rho_2(\text{συν}\theta_2+i\text{ημ}\theta_2)\\&=\rho_1\rho_2[(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)\cdot(\text{συν}\theta_2+i\text{ημ}\theta_2)]\\&=\rho_1\rho_2[(\text{συν}\theta_1\text{συν}\theta_2-\text{ημ}\theta_1\text{ημ}\theta_2)+i(\text{ημ}\theta_1\text{συν}\theta_2+\text{συν}\theta_1\text{ημ}\theta_2)]\\&=\rho_1\rho_2[\text{συν}(\theta_1+\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}$$

Ομοίως, για το πηλίκο τους $\frac{z_1}{z_2}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)}{\rho_2(\text{συν}\theta_2+i\text{ημ}\theta_2)]}&=\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)(\text{συν}\theta_2-i\text{ημ}\theta_2)}{(\text{συν}\theta_2+i\text{ημ}\theta_2)(\text{συν}\theta_2-i\text{ημ}\theta_2)]}\\&=\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)[\text{συν}(\text{-}\theta_2)+i\text{ημ}(\text{-}\theta_2)]}{\text{συν}^2\theta_2+\text{ημ}^2\theta_2}\\&=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{συν}(\theta_1-\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1-\theta_2)].\end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

> Αν $z_1=\rho_1(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)$ και $z_2=\rho_2(\text{συν}\theta_2+i\text{ημ}\theta_2)$ είναι δυο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε
>
> $$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2[\text{συν}(\theta_1+\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)]$$
> $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{συν}(\theta_1-\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1-\theta_2)].$$

Για παράδειγμα, αν $z_1=2\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right)$ και $z_2=3\left(\text{συν}\frac{11\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{11\pi}{6}\right)$, τότε

$$z_1\cdot z_2=2\cdot3\left[\text{συν}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right)+i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right)\right]=6\left(\text{συν}\frac{5\pi}{2}+i\text{ημ}\frac{5\pi}{2}\right)=6i$$

και

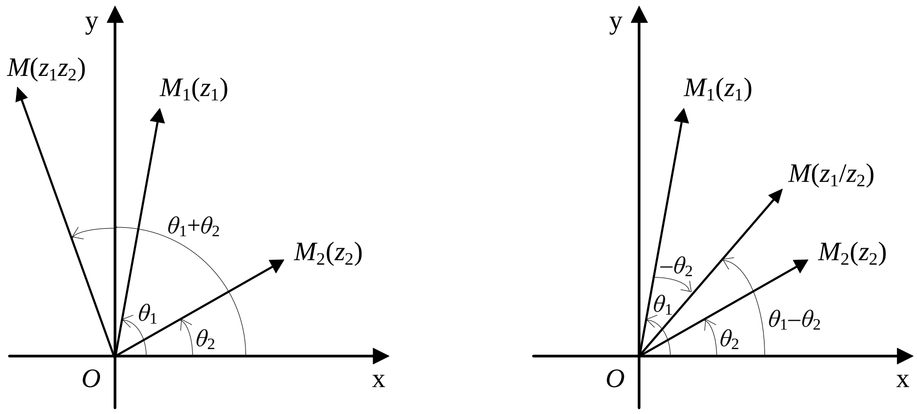
$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{3}\left[\text{συν}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}\right)+i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{11\pi}{6}\right)\right]&=\frac{2}{3}\left[\text{συν}\left(\frac{-7\pi}{6}\right)+i\text{ημ}\left(\frac{-7\pi}{6}\right)\right]\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{3}+i\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Από τις τριγωνομετρικές μορφές του γινομένου και του πηλίκου μιγαδικών προκύπτουν οι ιδιότητες

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{και} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

τις οποίες έχουμε συναντήσει και στην § 5.3.

Η γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου και του πηλίκου δύο μιγαδικών φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



(α) (β)

Σύμφωνα με τα παραπάνω:

- Ο πολλαπλασιασμός του μιγαδικού $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)$ με το μιγαδικό $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)$ σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία θ_2 και μετά πολλαπλασιασμό της με ρ_2 (Σχ. α). Επομένως, ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού z με το μιγαδικό $\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta$ στρέφει μόνο τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία θ, αφού $|\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta| = 1$. Ειδικότερα, ο πολλαπλασιασμός του z με i στρέφει τη διανυσματική ακτίνα του z κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$, αφού $i = \text{συν}\frac{\pi}{2} + i\text{ημ}\frac{\pi}{2}$.

- Η διαίρεση του μιγαδικού $z_1 = (\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)$ με το μιγαδικό $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)$ σημαίνει στροφή της διανυσματικής ακτίνας του z_1 κατά γωνία $-\theta_2$ και μετά πολλαπλασιασμό της με $\frac{1}{\rho_2}$ (Σχ. β).

Θεώρημα του De Moivre

Αν $z=\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή, σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$z^2=z\cdot z=\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)=\rho^2(\text{συν}2\theta+i\text{ημ}2\theta)\cdot$$
$$z^3=z^2\cdot z=\rho^2(\text{συν}2\theta+i\text{ημ}2\theta)\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)=\rho^3(\text{συν}3\theta+i\text{ημ}3\theta)\cdot$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι

$$z^4=\rho^4(\text{συν}4\theta+i\text{ημ}4\theta)\cdot$$
$$z^5=\rho^5(\text{συν}5\theta+i\text{ημ}5\theta)\cdot$$

Γενικά, ισχύει το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Αν $z=\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή και ν είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε

$$z^\nu=\rho^\nu[\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta)].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $P(\nu)$ η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

- Για $\nu=1$ η ισότητα γίνεται $z^1=\rho^1[\text{συν}(1\cdot\theta)+i\text{ημ}(1\cdot\theta)]$ ή ισοδύναμα $z=\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$, δηλαδή η $P(1)$ είναι αληθής.
- Θα αποδείξουμε ότι αν $P(\nu)$ αληθής, τότε $P(\nu+1)$ αληθής, δηλαδή αν $z^\nu=\rho^\nu[\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta)]$, τότε $z^{\nu+1}=\rho^{\nu+1}[\text{συν}(\nu+1)\theta+i\text{ημ}(\nu+1)\theta]$.

Έχουμε
$$\begin{aligned} z^{\nu+1}=z^\nu\cdot z&=\rho^\nu[\text{συν}(\nu\theta)+i\,\text{ημ}(\nu\theta)]\cdot\rho(\text{συν}\theta+i\,\text{ημ}\theta)\\ &=\rho^{\nu+1}[\text{συν}(\nu+1)\theta+i\text{ημ}(\nu+1)\theta].\end{aligned}$$

Άρα η $P(\nu)$ αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν. ■

Για παράδειγμα, αν $z=\sqrt{3}+i$, επειδή $z=2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} z^{1998}&=\left[2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)\right]^{1998}=2^{1998}\left(\text{συν}\frac{1998\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{1998\pi}{6}\right)\\ &=2^{1998}(\text{συν}333\pi+i\text{ημ}333\pi)=2^{1998}(\text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi)=-2^{1998}.\end{aligned}$$

Το προηγούμενο θεώρημα αποδίδεται στο μαθηματικό **De Moivre** και γι'αυτό φέρει το όνομά του.

Το Θεώρημα του De Moivre ισχύει και όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός ακέραιος.

Πράγματι, έχουμε

$$
\begin{aligned}
[\rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)]^{-\nu} &= \frac{1}{\rho^{\nu}(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)^{\nu}} \\
&= \frac{1\cdot(\text{συν}0 + i\text{ημ}0)}{\rho^{\nu}\cdot(\text{συν}(\nu\theta) + i\text{ημ}(\nu\theta))} \\
&= \rho^{-\nu}[\text{συν}(0\text{-}\nu\theta) + i\text{ημ}(0\text{-}\nu\theta)] \\
&= \rho^{-\nu}[\text{συν}(\text{-}\nu\theta) + i\text{ημ}(\text{-}\nu\theta)]\,.
\end{aligned}
$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z, αν $Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{6}$.

ΛΥΣΗ

Αν $z = x + yi$, τότε $\frac{z-1}{z+1} = \frac{(x-1)+yi}{(x+1)+yi} = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}i$.

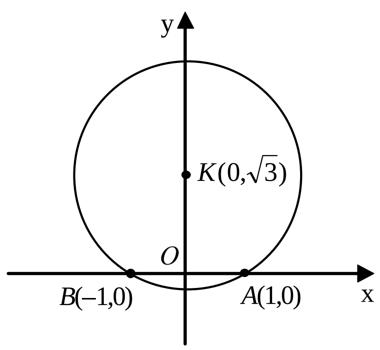
Άρα,

$$\frac{z-1}{z+1} = A + Bi, \quad \text{όπου} \quad A = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} \quad \text{και} \quad B = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

Επομένως, η συνθήκη $Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{6}$ είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις:

$$
\begin{cases} \dfrac{B}{A} = \varepsilon\phi\dfrac{\pi}{6} \\ B > 0 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} \dfrac{2y}{x^2+y^2-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y > 0 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 2^2 \\ y > 0 \end{cases}.
$$



Άρα, το σύνολο των εικόνων του z είναι το τόξο του κύκλου κέντρου $K(0,\sqrt{3})$ και ακτίνας $\rho = 2$ που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

2. **Αν $ημα+ημβ+ημγ=0$ και $συνα+συνβ+συνγ=0$, να αποδειχτεί ότι**

α) $συν3α+συν3β+συν3γ=3συν(α+β+γ)$

β) $ημ3α+ημ3β+ημ3γ=3ημ(α+β+γ)$.

ΛΥΣΗ

Έστω οι μιγαδικοί $a=συνα+iημα$, $b=συνβ+iημβ$, $c=συνγ+iημγ$. Έχουμε

$$a+b+c=(συνα+συνβ+συνγ)+i(ημα+ημβ+ημγ)=0+0i=0$$

και επομένως, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Με αντικατάσταση των a,b και c έχουμε διαδοχικά:

$$(συνα+iημα)^3+(συνβ+iημβ)^3+(συνγ+iημγ)^3=$$
$$=3(συνα+iημα)(συνβ+iημβ)(συνγ+iημγ)$$

$$(συν3α+iημ3α)+(συν3β+iημ3β)+(συν3γ+iημ3γ)=$$
$$=3[συν(α+β+γ)+iημ(α+β+γ)]$$

$$(συν3α+συν3β+συν3γ)+i(ημ3α+ημ3β+ημ3γ)=$$
$$=3συν(α+β+γ)+i3ημ(α+β+γ).$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των δύο μελών έχουμε:

$$συν3α+συν3β+συν3γ=3συν(α+β+γ) \quad \text{και}$$

$$ημ3α+ημ3β+ημ3γ=3ημ(α+β+γ).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς:

α) $1+\sqrt{3}i$ β) $1-\sqrt{3}i$ γ) $-1-\sqrt{3}i$ δ) $-1+\sqrt{3}i$ ε) 4 στ) -4.

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $4(συν15^0+iημ15^0)\cdot 6(συν30^0+iημ30^0)$

β) $5\left(συν\frac{\pi}{8}+iημ\frac{\pi}{8}\right)\cdot 2\left(συν\frac{3\pi}{8}+iημ\frac{3\pi}{8}\right)$

γ) $\left(συν\frac{2\pi}{10}+iημ\frac{2\pi}{10}\right)\cdot\left(συν\frac{3\pi}{10}+iημ\frac{3\pi}{10}\right)$.

3. Να κάνετε τις πράξεις

α) $\dfrac{25(\text{συν}160^0+i\text{ημ}160^0)}{5(\text{συν}100^0+i\text{ημ}100^0)}$ β) $\dfrac{6\left(\text{συν}\dfrac{5\pi}{6}+i\text{ημ}\dfrac{5\pi}{6}\right)}{\text{συν}\dfrac{\pi}{3}+i\text{ημ}\dfrac{\pi}{3}}$

γ) $\dfrac{7(\text{συν}130^0+i\text{ημ}130^0)}{14(\text{συν}(-20^0)+i\text{ημ}(-20^0))}$.

4. Να βρείτε τις δυνάμεις

α) $[2(\text{συν}20^0+i\text{ημ}20^0)]^3$ β) $\left[3\left(\text{συν}\dfrac{5\pi}{4}+i\text{ημ}\dfrac{5\pi}{4}\right)\right]^8$

γ) $\left(\text{συν}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\text{ημ}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{16}$.

5. Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-6}$.

6. Αν $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, να υπολογίσετε τον z^{2000}.

7. Αν $z_1=\sqrt{3}+i$ και $z_2=\sqrt{3}-i$, να υπολογίσετε την παράσταση $z_1^\nu+z_2^\nu$, όπου ν θετικός ακέραιος.

8. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη διαίρεση ενός μιγαδικού z με i.

9. Αν $z=1+i\sqrt{3}$ και $w=1+i$, να δείξετε ότι $Arg\left(\dfrac{z}{w}\right)=\dfrac{\pi}{12}$ και να βρείτε το ημ$\dfrac{\pi}{12}$ και το συν$\dfrac{\pi}{12}$.

10. Να βρείτε το μέτρο και το βασικό όρισμα του μιγαδικού $z\neq 0$ αν $z^2=\bar{z}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. α) Να βρείτε το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού w, όπου $w=\left(\dfrac{1+\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta}{1+\text{συν}\theta-i\text{ημ}\theta}\right)^\nu$, $\nu\in\mathbf{N}^*$ και $\theta\neq(2\kappa+1)\pi$, $\kappa\in\mathbf{Z}$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{100}$.

2. α) Να δείξετε ότι αν $(1+i)^{\nu}=(1-i)^{\nu}$, όπου $\nu\in\mathbf{N}^*$ τότε $\nu=4\kappa,\ \kappa\in\mathbf{N}$

β) Αν $f(\nu)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{\nu}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{\nu}$, να δείξετε ότι $f(\nu+4)+f(\nu)=0$.

3. Να αποδείξετε ότι

$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$, αν και μόνο αν $Arg(z_1)=Arg(z_2)$.

4. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει:

α) $Arg(z-i)=\frac{\pi}{6}$ β) $Arg(z+1)=\frac{\pi}{4}$ γ) $Arg\left(\frac{z}{z-i}\right)=\frac{\pi}{2}$.

5. Μεταξύ όλων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη συνθήκη $|z+2-5i|\leq 2$, να βρείτε εκείνον που έχει:

α) Το μικρότερο πρωτεύον όρισμα β) Το μεγαλύτερο πρωτεύον όρισμα.

6. Αν $z=\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta$, να αποδείξετε ότι:

α) $z^{\nu}+\frac{1}{z^{\nu}}=2\text{συν}(\nu\theta)$ β) $z^{\nu}-\frac{1}{z^{\nu}}=2i\text{ημ}(\nu\theta)$.

7. Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν $|z|=1$ και $w=(\sqrt{3}-i)z$, τότε:

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w.

β) Να βρείτε την εικόνα εκείνου του μιγαδικού από τους w, για τον οποίο ισχύει $Arg(w)=\frac{\pi}{4}$.

8. Αν $z=\frac{1-\kappa^2}{1+\kappa^2}+i\frac{2\kappa}{1+\kappa^2}$ και $Arg(z)=\frac{\pi}{3}$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ

9. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2|z_1-z_2|x+(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$, όπου z_1 και z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

5.5 *ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ* C

Εισαγωγή

Η επίλυση των εξισώσεων 3ου και 4ου βαθμού, η “αναγκαστική” επαφή με τους μιγαδικούς αριθμούς για την έκφραση των πραγματικών ριζών και η εξέλιξη του αλγεβρικού λογισμού δημιούργησαν στις αρχές του 17ου αιώνα τις προϋποθέσεις για την ανάπτυξη μιας γενικής θεωρίας των πολυωνυμικών εξισώσεων στην Άλγεβρα. Βασικά στοιχεία αυτής της θεωρίας δεν ήταν μόνο οι μέθοδοι επίλυσης, αλλά και δομικά ζητήματα, όπως οι σχέσεις ριζών και συντελεστών μιας εξίσωσης, καθώς και η σχέση ανάμεσα στο βαθμό και στο πλήθος των ριζών. Το τελευταίο, που καθιερώθηκε αργότερα ως **Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**

“κάθε πολυωνυμική εξίσωση ν βαθμού έχει στο σύνολο των μιγαδικών ν ακριβώς ρίζες”,

διατυπώνεται στην αρχή διστακτικά, καθώς οι μιγαδικοί δε θεωρούνται ακόμη ισότιμοι προς τους υπόλοιπους αριθμούς. Ο R. Descartes, στο βιβλίο ΙΙΙ της “La Géométrie” (1637) γράφει ότι: “κάθε εξίσωση μπορεί να έχει τόσες διαφορετικές ρίζες όσες και οι διαστάσεις [δηλ. ο βαθμός] της άγνωστης ποσότητας στην εξίσωση”, αλλά ονομάζει τις θετικές ρίζες “αληθινές”, τις αρνητικές “ψεύτικες” και εισάγει για πρώτη φορά τον όρο “φανταστικές” για τις υπόλοιπες:

“…ενώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση $x^3-6x^2+13x-10=0$ *έχει τρεις ρίζες, εν τούτοις υπάρχει μία μόνο πραγματική ρίζα, το 2, ενώ οι άλλες δύο παραμένουν φανταστικές”.*

Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας άρχισε να αποκτά εξαιρετική σημασία με την ανάπτυξη της Ανάλυσης, καθώς η παραγοντοποίηση των πολυωνύμων έπαιζε πρωταρχικό ρόλο στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων (διάσπαση ρητών κλασμάτων σε απλά κλάσματα). Ο G.W. Leibniz έθεσε το 1702 αυτό το ζήτημα ισχυριζόμενος (λαθεμένα) ότι το πολυώνυμο x^4+a^4 δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων 1ου ή 2ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. Το γεγονός αυτό οδήγησε στις πρώτες συστηματικές προσπάθειες να αποδειχτεί ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων 1ου ή 2ου βαθμού, που αποτελεί μια άλλη ισοδύναμη μορφή του θεμελιώδους θεωρήματος. Ύστερα από ορισμένες ημιτελείς προσπάθειες των d’Alembert (1746), L. Euler (1749) και J.L. Lagrange (1772), ο C.F. Gauss έδωσε την πρώτη αυστηρή απόδειξη το 1799 (σε ηλικία 22 χρονών), στη διδακτορική του διατριβή που είχε τίτλο: "Νέα απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε ακέραια ρητή συνάρτηση μιας μεταβλητής μπορεί να αναλυθεί σε πραγματικούς παράγοντες πρώτου και δεύτερου βαθμού".

Η Εξίσωση $\boldsymbol{z^{\nu}=1}$

Γνωρίζουμε ότι στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση $z^{\nu}=1$ έχει μια λύση, την $z=1$, αν ο ν είναι περιττός και δύο λύσεις, τις $z_1=1$ και $z_2=-1$, αν ο ν είναι άρτιος.
Ας λύσουμε τώρα στο σύνολο **C** των μιγαδικών αριθμών μερικές εξισώσεις της μορφής $z^{\nu}=1$, όπου ν θετικός ακέραιος. Έχουμε:

- $z^3=1 \Leftrightarrow z^3-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0$

$$\Leftrightarrow z-1=0 \ \text{ ή } \ z^2+z+1=0$$

$$\Leftrightarrow z=1 \ \text{ ή } \ z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \ \text{ ή } \ z=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

δηλαδή η εξίσωση έχει στο **C** τρεις ρίζες.

- $z^4=1 \Leftrightarrow z^4-1=0 \Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1)=0$

$$\Leftrightarrow z^2-1=0 \ \text{ ή } \ z^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow z=1 \ \text{ ή } \ z=-1 \ \text{ ή } \ z=i \ \text{ ή } \ z=-i,$$

δηλαδή η εξίσωση έχει στο σύνολο **C** τέσσερις λύσεις.

Γενικά ισχύει το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $z^{\nu}=1$, όπου ν θετικός ακέραιος, έχει ν ακριβώς διαφορετικές λύσεις, οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$z_{\kappa}=\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu}+i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}, \qquad \kappa=0,1,2,3,\dots,\nu-1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $r(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$ μια λύση σε τριγωνομετρική μορφή της εξίσωσης $z^{\nu} = 1$.
Τότε,

$$[r(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)]^{\nu} = 1,$$

οπότε
$$r^{\nu}(\text{συν}(\nu\theta) + i\text{ημ}(\nu\theta)) = \text{συν}0 + i\text{ημ}0$$

Άρα, $r^{\nu} = 1$ και $\nu\theta - 0 = 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbf{Z}$, δηλαδή $r = 1$ και $\theta = \dfrac{2\kappa\pi}{\nu}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης $z^{\nu} = 1$, θα είναι της μορφής

$$\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}, \quad \kappa \in \mathbf{Z}, \qquad (1)$$

Αλλά και *αντιστρόφως*, κάθε μιγαδικός της μορφής $z_{\kappa} = \text{συν}\dfrac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\dfrac{2\kappa\pi}{\nu}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $z^{\nu} = 1$, αφού

$$z_{\kappa} = \left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}\right) = \text{συν}(2\kappa\pi) + i\text{ημ}(2\kappa\pi) = 1.$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης $z^{\nu} = 1$ είναι οι αριθμοί

$$z_{\kappa} = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}, \quad \kappa \in \mathbf{Z}. \qquad (1)$$

Για $\kappa = 0$ έχουμε την προφανή λύση της εξίσωσης $z_0 = 1$, την οποία βρίσκουμε και για $\kappa = \nu$, αφού $z_{\nu} = \text{συν}\dfrac{2\nu\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\dfrac{2\nu\pi}{\nu} = 1$.

Αν θέσουμε $z_1 = \text{συν}\left(\dfrac{2\pi}{\nu}\right) + i\,\text{ημ}\left(\dfrac{2\pi}{\nu}\right) = \omega$, τότε για τις ρίζες της $z^{\nu} = 1$, θα ισχύει η σχέση

$$z_{\kappa} = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu} = \left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\kappa} = \omega^{\kappa}, \quad \kappa \in \mathbf{Z}.$$

Είναι λοιπόν:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \omega, \quad z_2 = \omega^2, \quad z_3 = \omega^3, \ldots, z_{\nu-1} = \omega^{\nu-1}$$
$$z_{\nu} = \omega^{\nu} = 1, \quad z_{\nu+1} = \omega^{\nu+1} = \omega^{\nu} \cdot \omega = \omega \quad \text{κτλ.}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι λύσεις της $z^{\nu} = 1$ που δίνονται από την (1) δεν είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του κ έχουμε διαφορετικές λύσεις. Επειδή για κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ υπάρχουν ακέραιοι ρ και υ, τέτοιοι, ώστε να είναι $\kappa = \rho\nu + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < \nu$, θα έχουμε:

$$\omega^{\kappa} = \omega^{\rho\nu+\upsilon} = (\omega^{\nu})^{\rho} \cdot \omega^{\upsilon} = 1 \cdot \omega^{\upsilon} = \omega^{\upsilon}.$$

Δηλαδή, για κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ η λύση z_{κ} ταυτίζεται με μια από τις

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, ..., \omega^{\nu-1}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι οι λύσεις $1=\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, ..., \omega^{\nu-1}$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Έστω ότι δε συμβαίνει αυτό. Τότε θα υπάρχουν φυσικοί λ_1, λ_2 με $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \nu$, τέτοιοι, ώστε $\omega^{\lambda_1} = \omega^{\lambda_2}$, οπότε θα έχουμε διαδοχικά:

$$\text{συν}\frac{2\lambda_1\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\lambda_1\pi}{\nu} = \text{συν}\frac{2\lambda_2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\lambda_2\pi}{\nu}$$

$$\frac{2\lambda_1\pi}{\nu} - \frac{2\lambda_2\pi}{\nu} = \mu \cdot 2\pi, \quad \mu \in \mathbf{Z}$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \nu\mu, \quad \mu \in \mathbf{Z}.$$

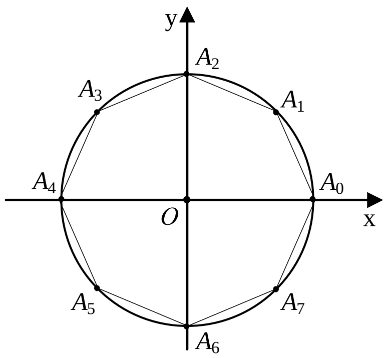
Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι ο ακέραιος ν διαιρεί τη διαφορά $\lambda_1 - \lambda_2$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $0 < \lambda_2 - \lambda_1 < \nu$.

Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης $z^{\nu} = 1$ είναι οι ν διαφορετικοί αριθμοί

$$\mathbf{1, \omega, \omega^2, \omega^3, ..., \omega^{\nu-1}}, \quad \text{όπου} \quad \boldsymbol{\omega = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)}.$$

Οι λύσεις αυτές λέγονται και **νιοστές ρίζες της μονάδας**.

Οι εικόνες $A_0, A_1, A_2, ..., A_{\nu-1}$ των αντίστοιχων λύσεων $1, \omega, \omega^2, \omega^3, ..., \omega^{\nu-1}$ της εξίσωσης $z^{\nu} = 1$ είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $r = 1$. Πιο συγκεκριμένα:



— Η κορυφή A_0 παριστάνει τη λύση 1.

— Η επόμενη κορυφή A_1 παριστάνει τη λύση $\omega = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)$.

— Η κορυφή A_2 παριστάνει την ω^2 και προκύπτει από την ω με στροφή του διανύσματος $\overrightarrow{OA_1}$ κατά γωνία $\frac{2\pi}{\nu}$.

— Η κορυφή A_3 παριστάνει την ω^3 και προκύπτει από την ω με στροφή του διανύσματος $\overrightarrow{OA_1}$ κατά γωνία $\dfrac{2\cdot 2\pi}{\nu}$ κτλ.

Η Εξίσωση $z^\nu = \text{a}$, $\text{a} \neq 0$

Έστω $\text{a}=\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$ μια τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού a. Τότε από τον τύπο του de Moivre έχουμε: $\text{a}=\left(\sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\dfrac{\theta}{\nu}+i\text{ημ}\dfrac{\theta}{\nu}\right)\right)^\nu$.

Αν θέσουμε $z_0=\sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\dfrac{\theta}{\nu}+i\text{ημ}\dfrac{\theta}{\nu}\right)$, τότε η εξίσωση $z^\nu=\text{a}$ γράφεται $z^\nu=z_0^\nu$

ή ισοδύναμα $$\left(\frac{z}{z_0}\right)^\nu=1$$

Επομένως, το $\dfrac{z}{z_0}$ μπορεί να πάρει τις ν διαφορετικές τιμές

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \ldots,\ \omega^{\nu-1}, \quad \text{όπου} \quad \omega=\text{συν}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)+i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right),$$

οπότε οι λύσεις της εξίσωσης $z^\nu=\text{a}$ είναι οι αριθμοί

$$\begin{aligned} z_\kappa = z_0\cdot\omega^\kappa &= \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{\theta}{\nu}+i\,\text{ημ}\frac{\theta}{\nu}\right)\cdot\left[\text{συν}\left(\frac{2\kappa\pi}{\nu}\right)+i\,\text{ημ}\left(\frac{2\kappa\pi}{\nu}\right)\right] \\ &= \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi+\theta}{\nu}+i\,\text{ημ}\frac{2\kappa\pi+\theta}{\nu}\right), \quad \kappa=0,1,2,\ldots,\nu-1. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

> Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $z^\nu=\text{a}$, όπου ν θετικός ακέραιος και $\text{a}=\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$, $\rho>0$, έχει ν διαφορετικές λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο:
>
> $$z_\kappa=\sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi+\theta}{\nu}+i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi+\theta}{\nu}\right), \quad \kappa=0,1,2,\ldots,\nu-1.$$

Οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης $z^\nu=\text{a}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt[\nu]{\rho}$, όπου $\rho=|\text{a}|$.

Έστω για παράδειγμα η εξίσωση

$$z^5 = 16(\sqrt{3}+i). \qquad (1)$$

Επειδή $16(\sqrt{3}+i)=32\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right)$, οι λύσεις z_κ της εξίσωσης (1) δίδονται

από τον τύπο $\quad z_\kappa = \sqrt[5]{32}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}}{5}+i\,\text{ημ}\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}}{5}\right)$

$$=2\left(\text{συν}\frac{12\kappa\pi+\pi}{30}+i\text{ημ}\frac{12\kappa\pi+\pi}{30}\right), \qquad \kappa=0,1,2,3,4.$$

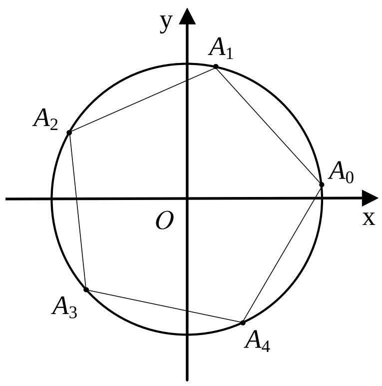
Πιο συγκεκριμένα οι λύσεις είναι:

$$z_0 = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{30}+i\text{ημ}\frac{\pi}{30}\right), \qquad z_1 = 2\left(\text{συν}\frac{13\pi}{30}+i\text{ημ}\frac{13\pi}{30}\right),$$

$$z_2 = 2\left(\text{συν}\frac{25\pi}{30}+i\,\text{ημ}\frac{25\pi}{30}\right), \qquad z_3 = 2\left(\text{συν}\frac{37\pi}{30}+i\,\text{ημ}\frac{37\pi}{30}\right),$$

$$z_4 = 2\left(\text{συν}\frac{49\pi}{30}+i\text{ημ}\frac{49\pi}{30}\right).$$

Οι λύσεις αυτές είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $\rho=2$.



Πολυωνυμικές Εξισώσεις με Πραγματικούς Συντελεστές

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, κάθε πολυωνυμική εξίσωση $P(z)=0$, νιοστού βαθμού, δηλαδή κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_\nu z^\nu + \alpha_{\nu-1}z^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \qquad \alpha_\nu \neq 0,$$

έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ν ακριβώς ρίζες.

Αν $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$ (οι οποίες δεν είναι κατανάγκη διαφορετικές), τότε αποδεικνύεται ότι το πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων ως εξής:

$$P(z)=\alpha_\nu(z-z_1)(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_\nu)$$

Επομένως, η επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων στο **C** γίνεται με τις ίδιες μεθόδους που χρησιμοποιούνται και στο σύνολο **R** των πραγματικών αριθμών. Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε πολυωνυμικές εξισώσεις με πραγματικούς μόνο συντελεστές.

Έχουμε ήδη λύσει τη δευτεροβάθμια εξίσωση, η οποία, όπως είδαμε, έχει δύο ρίζες, οι οποίες, αν δεν είναι πραγματικές, είναι μιγαδικές συζυγείς. Ας λύσουμε τώρα μία ανωτέρου βαθμού, για παράδειγμα την $z^3-3z^2+5z-3=0$, που είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού. Έχουμε:

$$z^3-3z^2+5z-3=0 \Leftrightarrow (z^2-2z+3)(z-1)=0 \Leftrightarrow z^2-2z+3=0 \text{ ή } z-1=0\,.$$

Όμως,

$$z^2-2z+3=0 \Leftrightarrow z=1+\sqrt{2}i \quad \text{ή} \quad z=1-\sqrt{2}i\,.$$

Άρα, οι ρίζες της εξίσωσης είναι $1+\sqrt{2}i$, $1-\sqrt{2}i$ και 1. Και στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι οι μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης είναι συζυγείς. Το συμπέρασμα αυτό γενικεύεται για οποιαδήποτε πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Αν ο μιγαδικός αριθμός $z_0=\alpha+\beta i$ είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής του $\bar{z}_0=\alpha-\beta i$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Μια πολυωνυμική εξίσωση, όπως γνωρίζουμε, έχει τη μορφή:

$$\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 z+\alpha_0=0\,, \text{ όπου } \alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\in\mathbf{R} \text{ και } \alpha_\nu\neq 0\,.$$

Αφού ο αριθμός z_0 είναι ρίζα της εξίσωσης, έχουμε κατά σειρά:

$$\alpha_\nu z_0^\nu+\alpha_{\nu-1}z_0^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 z_0+\alpha_0=0$$

$$\overline{\alpha_\nu z_0^\nu+\alpha_{\nu-1}z_0^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 z_0+\alpha_0}=\overline{0}$$

$$\overline{\alpha_\nu z_0^\nu}+\overline{\alpha_{\nu-1}z_0^{\nu-1}}+\ldots+\overline{\alpha_1 z_0}+\bar{\alpha}_0=0$$

$$\bar{\alpha}_\nu\bar{z}_0^\nu+\overline{\alpha_{\nu-1}}\,\overline{z_0^{\nu-1}}+\ldots+\bar{\alpha}_1\bar{z}_0+\bar{\alpha}_0=0$$

$$\alpha_\nu\bar{z}_0^\nu+\alpha_{\nu-1}\bar{z}_0^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\bar{z}_0+\alpha_0=0\,.$$

Άρα, ο $\bar{z}_0$ είναι και αυτός ρίζα της εξίσωσης. ■

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Αν** $\omega=\text{συν}\left(\dfrac{2\pi}{\nu}\right)+i\text{ημ}\left(\dfrac{2\pi}{\nu}\right)$**, να αποδειχτεί ότι:**

α) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+...+\omega^{\nu-1}=0$ **β)** $1\cdot\omega\cdot\omega^2\cdot\omega^3\cdot...\cdot\omega^{\nu-1}=(-1)^{\nu-1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α) Έχουμε $1+\omega+\omega^2+\omega^3+...+\omega^{\nu-1}=\dfrac{1-\omega^\nu}{1-\omega}=\dfrac{1-1}{1-\omega}=0$

β)
$$\begin{aligned}1\cdot\omega\cdot\omega^2\cdot\omega^3\cdot...\cdot\omega^{\nu-1}&=\omega^{1+2+3+...+(\nu-1)}\\&=\omega^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}\\&=\left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+i\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}\\&=\text{συν}\frac{2\pi\nu(\nu-1)}{2\nu}+i\text{ημ}\frac{2\pi\nu(\nu-1)}{2\nu}\\&=\text{συν}(\nu-1)\pi+i\text{ημ}(\nu-1)\pi\\&=(\text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi)^{\nu-1}\\&=(-1)^{\nu-1}\end{aligned}$$

2. **Να λυθεί η εξίσωση** $x^2-2\text{συν}\theta\cdot x+1=0$. **Αν** $x_1,\ x_2$ **είναι οι ρίζες της εξίσωσης αυτής, να κατασκευαστεί εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τις** $x_1^\nu,\ x_2^\nu$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\Delta=4\text{συν}^2\theta-4=4(\text{συν}^2\theta-1)=-4\text{ημ}^2\theta\leq0$.

Επομένως, $x_{1,2}=\dfrac{2\text{συν}\theta\pm2\text{ημ}\theta\cdot i}{2}=\text{συν}\theta\pm i\,\text{ημ}\theta$.

Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι η

$$x^2-(x_1^\nu+x_2^\nu)x+x_1^\nu\cdot x_2^\nu=0.$$

Έχουμε

$$x_1^\nu=(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)^\nu=\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta)$$

και

$$\begin{aligned}x_2^\nu=(\text{συν}\theta-i\text{ημ}\theta)^\nu=[\text{συν}(-\theta)+i\text{ημ}(-\theta)]^\nu&=\text{συν}(-\nu\theta)+i\text{ημ}(-\nu\theta)\\&=\text{συν}(\nu\theta)-i\text{ημ}(\nu\theta).\end{aligned}$$

Επομένως:

$$x_1^\nu + x_2^\nu = \text{συν}(\nu\theta) + i\,\text{ημ}(\nu\theta) + \text{συν}(\nu\theta) - i\,\text{ημ}(\nu\theta) = 2\text{συν}(\nu\theta)$$

και

$$x_1^\nu \cdot x_2^\nu = (\text{συν}(\nu\theta) + i\,\text{ημ}(\nu\theta))(\text{συν}(-\nu\theta) + i\,\text{ημ}(-\nu\theta)) = \text{συν}0 + i\,\text{ημ}0 = 1$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 2\text{συν}(\nu\theta)x + 1 = 0\,.$$

3. Να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων το πολυώνυμο $P(x)=3x^3+4x^2+5x+6$, αν γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό $1+\sqrt{2}i$.

ΛΥΣΗ

Αφού το $P(x)$ έχει ρίζα τον $x_0=1+\sqrt{2}i$, θα έχει ρίζα και το συζυγή του $\bar{x}_0=1-\sqrt{2}i$. Επομένως, το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το γινόμενο $Q(x)=(x-x_0)(x-\bar{x}_0)$, για το οποίο έχουμε

$$\begin{aligned} Q(x) &= [x-(1+\sqrt{2}i)][x-(1-\sqrt{2}i)] = [(x-1)-\sqrt{2}i][(x-1)+\sqrt{2}i] \\ &= (x-1)^2 - (\sqrt{2}i)^2 \\ &= x^2+1-2x+2 \\ &= x^2-2x+3\,. \end{aligned}$$

Αν κάνουμε τη διαίρεση $P(x):Q(x)$, βρίσκουμε πηλίκο $3x+2$, επομένως είναι $P(x)=(x^2-2x+3)(3x+2)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Γενικά, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή: κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων με πραγματικούς συντελεστές, όπου οι δευτεροβάθμιοι παράγοντες (αν υπάρχουν) έχουν αρνητική διακρίνουσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις στο μιγαδικό επίπεδο:

α) $z^3=1$ β) $z^4=1$ γ) $z^6=1$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\boldsymbol{z^3=-i}$ β) $z^4=16\left(\text{συν}\frac{4\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{4\pi}{3}\right)$ γ) $z^5=243\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right)$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3=\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$ β) $z^4=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ γ) $z^6=-64$.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3+3z^2+4z=8$ β) $z^4+5z^2+4=0$.

5. Αν ο μιγαδικός $2+i$ είναι ρίζα της εξίσωσης $3x^3-10x^2+7x+10=0$, να βρείτε και τις άλλες ρίζες της.

6. Αν w είναι μια κυβική ρίζα της μονάδος, με $w\neq 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $(1-w+w^2)(1+w-w^2)$

7. Να λύσετε την εξίσωση $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5=0$.

8. Να λύσετε την εξίσωση $z^3+3z^2+3z+9=0$ και να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $z^3=1-i$ β) $(z-1)^3-(1-i)(z+1)^3=0$.

2. Να λύσετε την εξίσωση $z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0$.

3. Να λύσετε την εξίσωση $z^7+1=0$ και στη συνέχεια να βρείτε τα τριώνυμα με πραγματικούς συντελεστές που είναι παράγοντες του πολυωνύμου $z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1$.

4. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων $(z^2+1)^2+z^3+z=0$ και $z^{16}+2z^{14}+1=0$.

5. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z, για τους οποίους ισχύει $z^7\bar{z}^3=1$.

6. Αν η εξίσωση $(1+iz)^{\nu}=p(1-iz)^{\nu}$, $\nu\in\mathbf{N}^{*}$ έχει πραγματική ρίζα, να αποδείξετε ότι $|p|=1$.

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x+4=0$ με ρίζες τις x_1 και x_2.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων x_1+x_2, x_1x_2 και $x_1^2+x_2^2$.

β) Αν η εξίσωση $x^2+px+q=0$ έχει ως ρίζες τις x_1^2 και x_2^2, να βρείτε τις τιμές των p και q.

8. α) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot z-2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot z+(5-4\sigma\upsilon\nu^2\theta)=0$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το θ μεταβάλλεται στο διάστημα $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης κινούνται σε μια υπερβολή.

9. Να λύσετε την εξίσωση $x^9-x^5+x^4-1=0$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z)=\dfrac{(z-1)(\bar{z}+1)}{z+\bar{z}}$ με $z\in\mathbf{C}$ και $\mathrm{Re}(z)\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)=f(z)$.

β) Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία $M(x,y)$, για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha x+\beta yi$ με $\alpha,\beta,x,y\in\mathbf{R}$ και $\alpha\beta x\neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση $\mathrm{Re}(f(z))=0$ (α,β σταθερά).

2. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w και w_1, για τους οποίους ισχύουν: $w=z-zi$ και $w_1=\frac{1}{\alpha}+\alpha i$, όπου $\alpha\in\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι αν το α μεταβάλλεται στο $\mathbf{R}^{*}$ και ισχύει $w=\overline{w_1}$, τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται σε μια υπερβολή.

3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z=\lambda+2+(3\lambda-1)i$, $\lambda\in\mathbf{R}$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει $w = z + (1+i)$

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή $O(0,0)$.

4. Να γραμμοσκιάσετε το τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει:
α) $|2z+1| < |z+i|$ β) $|z-1| = 1 + \text{Re}(z)$.

5. Να αποδείξετε ότι αν οι μιγαδικοί $z_1, z_2, ..., z_\kappa$ έχουν τις εικόνες τους στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$, τότε ισχύει $z_1 + z_2 + ... + z_\kappa \neq 0$.

6. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των λύσεων της εξίσωσης $(1-z)^\nu = z^\nu$ είναι σημεία της ευθείας $x = \dfrac{1}{2}$.

7. Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με πραγματικούς συντελεστές και $\alpha \neq 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι:
α) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ και λ ισχύει $(\alpha\kappa^2 + \beta\kappa + \gamma)(\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma) > 0$.
β) Για οποιουσδήποτε συζυγείς μιγαδικούς z_1 και z_2 διαφορετικούς από τις ρίζες του τριωνύμου ισχύει επίσης $(\alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma)(\alpha z_2^2 + \beta z_2 + \gamma) > 0$.

8. Γνωρίζοντας ότι για τις νιοστές ρίζες της μονάδας $1, z_1, z_2, ..., z_\kappa$ ισχύει $1 + z_1 + z_2 + .. + z_{\nu-1} = 0$, να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\eta\mu\dfrac{2\pi}{\nu} + \eta\mu\dfrac{4\pi}{\nu} + \eta\mu\dfrac{6\pi}{\nu} + ... + \eta\mu\dfrac{2(\nu-1)\pi}{\nu} = 0$,

β) $\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{\nu} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{\nu} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{6\pi}{\nu} + ... + \sigma\upsilon\nu\dfrac{2(\nu-1)\pi}{\nu} = -1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:
(i) Αν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ισχύει $u^2 + v^2 = 0$, τότε :
Α. $u=0$ Β. $v=0$
Γ. $u=v=0$ Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

(ii) Ο αριθμός $z=(3+5i)^{10}+(3-5i)^{10}$ είναι:

Α. Φανταστικός　　Β. Μηδέν

Γ. Πραγματικός　　Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

2. Ποιες από τις επόμενες ισότητες αληθεύουν για κάθε μιγαδικό z :

Α. $|z^2|=|z|^2$　　Β. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$　　Γ. $z\cdot\bar{z}=z^2$

Δ. $z\cdot\bar{z}=|z|$　　Ε. $|z^2|=|z|^2$.

3. Σύμφωνα με τη συνθήκη που ικανοποιούν οι μιγαδικοί z και αναφέρεται στην πρώτη στήλη, να τους αντιστοιχίσετε στην ευθεία της δεύτερη στήλης που ανήκει η εικόνα τους:

Συνθήκη	**Ευθεία**
$\lvert z-i\rvert=\lvert z+i\rvert$	$x=1$
$\lvert z-1\rvert=\lvert z+1\rvert$	yy'
$\lvert z-1\rvert=\lvert z-i\rvert$	$y=x$
	$y=-x$
$\lvert z+1\rvert=\lvert z+i\rvert$	$x'x$

4. Να αντιστοιχίσετε κάθε μιγαδικό z της πρώτης στήλης στο όρισμά του της δεύτερης στήλης:

Μιγαδικός ($k>0$)	**Όρισμα**
$k+ki$	-45^0
$k-ki$	225^0
	45^0
$-k-ki$	180^0
	60^0
$-k+ki$	135^0

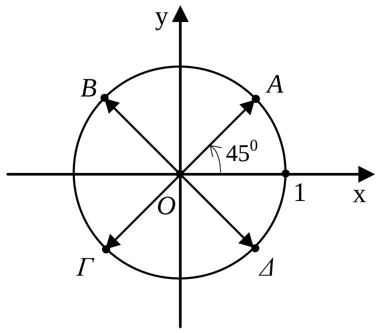
5. Να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.

Ό αριθμός των μιγαδικών ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης $5^{\underline{ου}}$ βαθμού με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να είναι:

Α. 1　　Β. 2　　Γ. 3　　Δ. 4　　Ε. 5

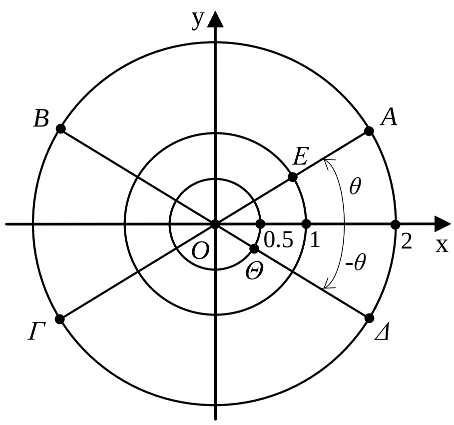
6. Να γράψετε τους μιγαδικούς που έχουν ως εικόνες τα σημεία Α, Β, Γ και Δ του διπλανού σχήματος:

Α:
Β:
Γ:
Δ:



7. Αν z είναι ο μιγαδικός που έχει ως εικόνα το Α, να αντιστοιχίσετε κάθε μιγαδικό της πρώτης στήλης στην εικόνα του που αναφέρεται στη δεύτερη στήλη και σημειώνεται στο διπλανό σχήμα:

Μιγαδικός	Εικόνα
$\bar{z}$	*Β*
$\frac{1}{2}z$	*Δ*
$\frac{1}{z}$	*Θ*
$-z$	*Γ*
$-\bar{z}$	*Ε*



ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1 *ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ*

§ 1.1, 1.2

1. $\vec{\Sigma B} = -(\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} + \vec{F_5})$.
2. (i) Παραλληλόγραμμο, (ii) Έχει ίσες διαγώνιες, (iii) Ορθογώνιο.
3. (i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, (ii) $\vec{\beta} - \vec{\alpha} - \vec{\gamma}$,

   (iii) $\vec{\zeta} - \vec{\varepsilon} - \vec{\delta} + \vec{\gamma} - \vec{\beta} - \vec{\alpha}$.
4. $\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma E}$.
5. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) - (\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{O\Delta})$.
6. $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$.
7. Να πάρετε σημείο αναφοράς.

§ 1.3 Α΄ Ομάδας

1. 1, $\uparrow\uparrow \vec{\alpha}$.
2. (i) $2\vec{\beta} - 3\vec{\alpha}$, (ii) $\frac{1}{4}\vec{\alpha} - \frac{7}{4}\vec{\beta}$.
3. $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{M\Gamma}$ κτλ.
4. (i) $\vec{\beta} + \vec{\alpha}$, $\frac{1}{3}(\vec{\beta} + \vec{\alpha})$, $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$, $\frac{1}{3}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$,

   $\frac{2}{3}(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ (ii) Συνευθειακά
5. $\overrightarrow{\Gamma E} = 3\overrightarrow{A\Gamma}$
6. $\overrightarrow{K\Lambda} = -3\overrightarrow{KM}$
7. $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma})$ κτλ.
8. $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma})$ κτλ.
9. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{AN}$ κτλ.
10. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Gamma A}$ κτλ.
11. $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Delta}$ κτλ.

§ 1.3 Β΄ Ομάδας

1. (i) $x\vec{\alpha} = -y\vec{\beta}$ κτλ. (ii) Ανάγεται στο (i) (iii) $x = 0$
2. $\overrightarrow{E\Gamma} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\overrightarrow{EZ}$
3. Να εκφράσετε την ισότητα $x\,\overrightarrow{KA} + y\,\overrightarrow{KB} + z\,\overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0}$ με σημείο αναφοράς το A.
4. $\overrightarrow{MA} = -\frac{\kappa}{\lambda}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MA} = \frac{\kappa}{\lambda}\overrightarrow{MB}$ κτλ.
5. $\overrightarrow{\Sigma G} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{O\Sigma}$ και $\overrightarrow{\Sigma G'} = 2\,\overrightarrow{\Sigma G}$
6. $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$
7. Να πάρετε σημείο αναφοράς O.
8. Να πάρετε σημείο αναφοράς το A.
9. $\vec{r} = \vec{\beta} + y(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$, $\vec{r} = 5\vec{\alpha} + x(3\vec{\beta} - 5\vec{\alpha})$ κτλ.

§ 1.4 Α΄ Ομάδας

2. 2,1 4,3 6,5 $|\beta+2|,|\alpha-1|$ $|y|,|x|$
3. (i) 2 (ii) 1
4. 2
5. 2
6. $\pm 2\,(3,4)$
7. (α) $\frac{1}{2}\vec{i}$, $\vec{i} + \vec{j}$, $\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$, $2\vec{j}$, $2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$, $2\vec{i} + \vec{j}$

   (β) $\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$, $-\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$, $-\vec{i}$, $-\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$,

   $-\frac{1}{2}\vec{i}$, $\vec{i} - 2\vec{j}$, $-2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$
8. (i) $(-3,0)$ (ii) $(0,-3)$

§ 1.4 Β΄ Ομάδας

1. $A(1,1)$, $B(2,4)$, $\Gamma(4,3)$, $\Delta(4,2)$ και $E(1,0)$
2. 5 ή -1
3. $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_4M_3}$
4. Τριγωνική ανισότητα για τα σημεία $A(\alpha_1,\beta_1)$, $B(\alpha_2,\beta_2)$ και $\Gamma(x,y)$.
5. Να σχεδιάσετε τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{r}$ με κοινή αρχή.

§ 1.5 Α΄ Ομάδας

1. (i) 13, -78, -25 (ii) $2\kappa+5\lambda=0$
2. 62, $24\sqrt{5}$, 48, $24\sqrt{5}$
3. (i) -1 (ii) $-\dfrac{1}{2}$
4. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}},\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$, $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}},\dfrac{-3}{\sqrt{13}}\right)$
5. 0
6. (i) $-\dfrac{3}{4}$ (ii) $\dfrac{1}{7}$ (iii) $\dfrac{4}{3}$
7. $\dfrac{2\pi}{3}$
8. $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=0$
9. $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
10. $\vec{v}\cdot\vec{\beta}=0$
11. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}=0$
12. $\vec{\beta}=-\dfrac{9}{5}\vec{\alpha}+\left(-\dfrac{22}{5},\dfrac{-11}{5}\right)$
13. 15, $\sqrt{593}$
14. -15
15. (i) $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ (ii) $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

§ 1.5 Β΄ Ομάδας

1. $(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta})^2\geq 0$, $\lambda=\mu=0$.
2. Να χρησιμοποιήσετε τη σχέση $|\vec{\alpha}|^2=\vec{\alpha}^2$.
3. (i) Να υπολογίσετε τα γινόμενα $\vec{\alpha}\cdot\vec{u}$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{u}$, (ii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
4. $(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=(-\vec{\gamma})^2$ κτλ.
5. Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα: $(x^2+y^2)(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha x+\beta y)^2=(\beta x-\alpha y)^2$.
6. Να πάρετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}=(\alpha,\beta)$ και $\vec{v}=(\gamma,\delta)$.
7. (i) $-(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$, $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$, (ii) 0.
8. (i) $\vec{\beta}-\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}-\vec{\beta}$.
9. $\overrightarrow{B\Theta}\cdot\overrightarrow{\Gamma Z}=0$
10. Να πάρετε το αντιδιαμετρικό του A.
11. Να πάρετε το αντιδιαμετρικό του B.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}$.
2. Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})$.
3. $|\overrightarrow{AM}|=4$
4. Αρκεί να δείξουμε $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\eta\mu\omega\leq|\vec{\beta}|$, όπου ω η γωνία $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.
5. (i) Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0=\overrightarrow{\Gamma H}\cdot\overrightarrow{AB}$,
   (ii) $\dfrac{1}{3}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})$, (iii) $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.
6. $\vec{x}=\left(\dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1}\right)\cdot\vec{\beta}-\vec{\gamma}$.
7. (i) $\overrightarrow{EK}=\dfrac{1}{2}(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})$, $\overrightarrow{E\Lambda}=\dfrac{1}{2}(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})$, $\overrightarrow{EM}=\dfrac{1}{2}\left[\kappa\vec{\alpha}+\dfrac{\kappa-1}{\kappa-\lambda}(\lambda\vec{\beta}-\kappa\vec{\alpha})\right]$,
   (ii) $\overrightarrow{KM}=\dfrac{\kappa}{\kappa-\lambda}\overrightarrow{K\Lambda}$
8. Χρησιμοποιείστε την άσκηση 4, Β΄ ομάδας, σελ. 28.

2 Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

§ 2.1 Α΄ Ομάδας

1. (i) 1, (ii) 2, (iii) $-\frac{1}{2}$.
2. (i) $\omega=\frac{\pi}{4}$, (ii) $\omega=\frac{\pi}{4}$,

   (iii) $\omega=\frac{\pi}{2}$, (iv) $\omega=0$.
3. (i) $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$, (ii) $x=1$, (iii) $y=-x$.
4. (i) $y=3x+3$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=-2x-2$,

   (ii) $y=3x+3$, $y=\frac{1}{2}x+3$, $y=-2x+3$.
5. (i) Τα ζεύγη των απέναντι πλευρών του *ΑΒΓΔ* είναι παράλληλα και οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα,

   (ii) $y=-x+4$, $y=x$.
6. $\lambda_{AB}=\lambda_{A\Gamma}=1$.
7. $y=-\dfrac{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta}x+\dfrac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta}$.
8. $y=x+1$.

§ 2.1 Β΄ Ομάδας

1. $y=x+3$, $y=-x+1$.
2. $y=x+3$, $y=-2x+6$, $B(-3,0)$, $\Gamma(4,-2)$,

   $y=-\frac{2}{7}x-\frac{6}{7}$.
3. $x=2$
4. (i) $y=\dfrac{-1}{\lambda\kappa}x+\dfrac{\lambda+\kappa}{\lambda\kappa}$, $AP=\sqrt{\lambda^2+\dfrac{1}{\kappa^2}}=BQ$
5. $y-\beta=-\dfrac{\beta}{\alpha}x$ κτλ.
6. $y=-\frac{2}{3}x+6$.

§ 2.2 Α΄ Ομάδας

1. Δεν υπάρχει $\mu\in\mathbf{R}$ που να μηδενίζει συγχρόνως τους συντελεστές των x και y.

   $\mu=1$, $\mu=0$, $\mu=0$.
2. (i) $y=-\frac{3}{2}x$, (ii) $\Gamma\left(-\frac{12}{13},\frac{18}{13}\right)$.
3. $y=\frac{1}{4}x-6$.
4. (i) $\Delta(2,4)$, (ii) $\sigma\upsilon\nu\theta\cong 0{,}416$
5. $\lambda=-2$ ή $\lambda=0$.
6. $\kappa=-1$

§ 2.2 Β΄ Ομάδας

1. (i) Δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους

   (ii) Δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους.
2. Διέρχονται από το σημείο $A(-1,2)$.
3. Διέρχονται από το σημείο $M(1,1)$.
4. $\varphi=45^0$.
5. $y=x=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.
6. $K\left(\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right)$.
7. $y=\dfrac{\alpha}{\beta}x-\dfrac{\alpha^2}{\beta}$.

§ 2.3 Α΄ Ομάδας

1. (i) $\sqrt{2}$, (ii) $2\sqrt{5}$, (iii) $\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$ (iv) 0.
2. (i) $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{5}{8}$, (ii) $51\dfrac{\sqrt{89}}{89}$, $\dfrac{68\sqrt{89}}{89}$

   (iii) $\dfrac{119\sqrt{89}}{89}$.
3. (i) $\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{4}{3}$, (ii) $d=3$.
4. $M(12,-2)$.
5. $y=-3x\pm 5\sqrt{10}$.

6. $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}-2\sqrt{13}$, $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}+2\sqrt{13}$.
7. (i) 9, (ii) 35, (iii) 0.
8. $M(0,0)$ ή $M(14,0)$.
9. $M(7,2)$ ή $M(1,0)$.
10. $E=20$.

§ 2.3 Β΄ Ομάδας

1. $y=x$ ή $y=-x$
2. $M\left(\frac{-15}{2},0\right)$ ή $M\left(\frac{10}{3},0\right)$.
3. $y=(6+4\sqrt{2})x-4-4\sqrt{2}$,
   $y=(6-4\sqrt{2})x-4+4\sqrt{2}$, $y=-2x+4$.
4. Ο άξονας $y'y$ και η $y=\frac{-4}{3}x$.
5. $M\left(-\frac{37}{7},-\frac{23}{7}\right)$ ή $M(-9,-7)$.
6. Πρέπει το εμβαδόν του $ΑΒΓ$ να ισούται με 0.
7. (i) Αν $M\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$ το μέσον του AB, το εμβαδόν του τριγώνου MPQ ισούται με 0.
   (ii) $\lambda_{AB}\lambda_{PQ}=-1$,
   (iii) $p=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}$, $q=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}$.
8. $2x-16y-1=0$, $64x+8y+33=0$.
9. $y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$ ή $y=\frac{3}{2}x+3$.
10. $-3x+4y-11=0$, $-3x+4y+21=0$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $x=1$ ή $y=0$.
2. $x+y=1$
3. Αποδείξτε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα δύο σημεία επαληθεύεται από το τρίτο.
4. $\beta^2x-\alpha^2y+\alpha\beta(\alpha-\beta)=0$.
5. $d=\frac{\beta(A-\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.
6. (i) $x-(2+\sqrt{3})y=0$, $x-(2-\sqrt{3})y=0$.
7. (i) $|\alpha|=|\beta|$, (ii) $\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1=0$.
8. (i) $\alpha\gamma<0$ και $\beta\gamma>0$, (ii) α,β,γ ομόσημα.

3 ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

§ 3.1 Α΄ Ομάδας

1. (i) $x^2+y^2=4$, (ii) $x^2+y^2=2(\alpha^2+\beta^2)$,
   (iii) $x^2+y^2=2$, (iv) $x^2+y^2=\alpha^2+\beta^2$.
2. (i) $y=2x+5$ ή $y=2x-5$
   (ii) $y=-2x+5$ ή $y=-2x-5$
   (iii) $x+2y=5$ ή $x-2y=5$.
3. Οι διαγώνιες είναι κάθετες και ίσες.
4. $y=x-2$.
5. (i) $x^2+(y-1)^2=4$
   (ii) $(x-3)^2+(y-5)^2=25$
   (iii) $(x-4)^2+(y-4)^2=5^2$ ή
   $(x-4)^2+(y+4)^2=5^2$
   (iv) $(x-6)^2+(y-6)^2=40$
   (v) $(x-6)^2+(y+9)^2=85$
   (vi) $(x-3)^2+(y-2)^2=2^2$
   (vii) $\left(x+\frac{9}{8}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{15}{8}\right)^2$.
6. (i) $K(-2,3)$, $\rho=4$
   (ii) $K(5,-6)$, $\rho=9$
   (iii) $K\left(-1,\frac{3}{2}\right)$, $\rho=\sqrt{\frac{35}{12}}$
   (iv) $K(2\alpha,-5\beta)$, $\rho=3|\beta|$.
7. (i) $y=-1$ (ii) $y=-\beta$.
8. Ο πρώτος εφάπτεται εσωτερικά του δεύτερου στο σημείο $A(-1,0)$.

§ 3.1 Β΄ Ομάδας

1. Οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση.
2. Το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του.
3. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ επαληθεύονται από το (x_0,y_0).
4. Οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση $x^2+y^2=9\alpha^2$ του κύκλου.
5. Ο κύκλος $x^2+y^2=(\rho\sqrt{2})^2$.
6. Ο κύκλος $(x-5)^2+y^2=4^2$.
7. Το σημείο $K(2,0)$ καθώς και ο κύκλος με κέντρο $\Lambda(-2,0)$ και $\rho=2\sqrt{2}$.
8. Το κέντρο βάρους του τριγώνου είναι το σημείο $O(0,0)$.
9. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών είναι

   $x=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+\beta\eta\mu\theta$ και $y=\alpha\eta\mu\theta-\beta\sigma\upsilon\nu\theta$
10. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$.

§ 3.2 Α΄ Ομάδας

1. (i) $y^2=-4x$, (ii) $y^2=-2x$, (iii) $y^2=4x$.
2. (i) $E(2,0),\ \delta{:}x=-2$, (ii) $E(-2,0),\ \delta{:}x=2$,

   (iii) $E(0,1),\ \delta{:}y=-1$, (iv) $E(0,-1),\ \delta{:}y=1$

   (v) $E(\alpha,0),\ \delta{:}x=-\alpha$, (vi) $E(0,\alpha),\ \delta{:}y=-\alpha$
4. $A(4,4)$, $B(-4,4)$.
5. (i) $y=x-1$ (ii) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

   (iii) $y=x-1$ ή $y=-x-1$.
6. Οι εξισώσεις τους είναι:

   $y=2x-4$, $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

§ 3.2 Β΄ Ομάδας

1. Τα κοινά σημεία τους είναι $A(1,2)$ και $B(1,-2)$.
2. $B(-1,0)$
3. $B\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
4. Αποδείξτε ότι το κέντρο του κύκλου απέχει από τον $y'y$ απόσταση ίση με την ακτίνα του.
5. $\lambda_{BE}=\lambda_{\varepsilon}=\frac{p}{y_1}$.
6. (i) $\overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{EB}$ (ii) $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
7. $B(-x_1,0)$, $\Gamma\left(-\frac{p}{2},y_1\right)$.

   Αποδείξτε ότι οι AB, ΓE τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.
8. (ii) Αποδείξτε ότι η εφαπτόμενες στα B και Γ συμπίπτουν.

§ 3.3 Α΄ Ομάδας

1. (i) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, (ii) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$

   (iii) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$, (iv) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

   (vi) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=1$.
2. (i) Είναι $\alpha=2, \beta=1$, οπότε …

   (ii) Είναι $\alpha=13, \beta=6$, οπότε …
3. Μια κορυφή του τετραγώνου είναι το $K\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.
4. Οι διαγώνιές του είναι ίσες και κάθετες.
5. Έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης.
6. (i) $y=-3x+4$ ή $y=-3x-4$

   (ii) $y=-2x+\frac{2\sqrt{21}}{3}$ ή $y=-2x-\frac{2\sqrt{21}}{3}$

   (iii) $y=-3x+4$ ή $y=3x+4$
7. Οι διαγώνιες είναι κάθετες και ίσες.

§ 3.3 Β΄ Ομάδας

1. Οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης.
2. Πολλαπλασιάστε τις ισότητες κατά μέλη.
3. Ισχύει $(ME')+(ME)=2\alpha$ και
$$(ME')^2-(ME)^2=4\varepsilon\alpha x .$$
4. Πάρτε $x_1=\alpha$συνφ_1 και $y_1=\beta$ημφ_1 και βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης.
5. Δείξτε ότι $(M_1N_2)^2=(M_2N_1)^2$, θέτοντας $\varepsilon=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.
6. Αν το M έχει συντεταγμένες (ασυνφ, βημφ) το N θα έχει συντεταγμένες (ασυνφ, αημφ) .
7. (i) Είναι $(A\Gamma)=\beta^2\cdot\dfrac{(\alpha-x_1)}{\alpha|y_1|}$ και
$$(A'\Gamma')=\beta^2\cdot\frac{(\alpha+x_1)}{\alpha|y_1|}$$
(ii) Αρκεί $\overrightarrow{E\Gamma}\perp\overrightarrow{E\Gamma'}$ και $\overrightarrow{E'\Gamma'}\perp\overrightarrow{E'\Gamma}$.
8. Είναι $p=\dfrac{\alpha^2}{x_1}$ και $q=\dfrac{\beta^2}{y_1}$.

§ 3.4 Α΄ Ομάδας

1. (i) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{144}=1$, (ii) $\dfrac{y^2}{36}-\dfrac{x^2}{64}=1$
(iii) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$, (iv) $\dfrac{x^2}{111}-\dfrac{3y^2}{592}=\pm1$.
2. (i) Είναι $\alpha=4$, $\beta=3$, οπότε …
(ii) Είναι $\alpha=\beta=2$, οπότε …
(iii) Είναι $\alpha=\sqrt{5}$, $\beta=12$, οπότε …
3. Είναι $\dfrac{\beta}{\alpha}=$εφ30^0, οπότε …
4. Δείξτε ότι $(O\Gamma)=\gamma$.
5. Βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτόμενης και της κάθετης.
6. Η παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y=\dfrac{\beta}{\alpha}x$ έχει εξίσωση $y=\dfrac{\beta}{\alpha}x+\delta$.
7. (i) $y=x-3$ ή $y=x+3$
(ii) Δεν υπάρχει
(iii) $y=x-3$ ή $y=-x+12$.

§ 3.4 Β΄ Ομάδας

1. Αν $K\Lambda MN$ είναι το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής, τότε τα τρίγωνα E_1OE και AOK είναι ίσα.
2. (i) Είναι $(A\Gamma)=\beta^2\cdot\left|\dfrac{x_1-\alpha}{\alpha y_1}\right|$ και
$$(A'\Gamma')=\beta^2\cdot\left|\frac{x_1+\alpha}{\alpha y_1}\right|.$$
(ii) Αρκεί $\overrightarrow{E\Gamma}\perp\overrightarrow{E\Gamma'}$ και $\overrightarrow{E'\Gamma'}\perp\overrightarrow{E'\Gamma}$.
3. Δείξτε ότι τα τμήματα M_1M_2 και M_3M_4 έχουν το ίδιο μέσο.
4. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M_2 της ζ_1 με την ε_2 και υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου OM_1M_2 .
5. Υπολογίστε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1=(\alpha,\beta)$ και $\vec{\delta}_2=(\alpha,-\beta)$.
6. Πάρτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_1 στο τυχαίο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ και αποδείξτε ότι αυτή δεν επαληθεύεται από τις συντεταγμένες $(\rho\alpha,0)$ του A_2 .

§ 3.5 Α΄ Ομάδας

1. (i) Κορυφή (1,0), Εστία (3,0)
(ii) Κορυφή (-2,0), Εστία (-2,4)
(iii) Κορυφή (4,-2), Εστία (2,-2)
(iv) Κορυφή (4,-4), Εστία $\left(4,-\dfrac{11}{2}\right)$.
2. (i) $O'(2,0)$, $\alpha=5$, $\beta=3$
(ii) $O'(-2,0)$, $\alpha=2$, $\beta=\dfrac{1}{2}$
(iii) $O'(4,2)$, $\alpha=3$, $\beta=2$

(iv) $O'(-3,1)$, $\alpha=4$, $\beta=3$.

3. (i) $O'(2,-4)$, $\alpha=2$, $\beta=\sqrt{21}$

   (ii) $O'(1,2)$, $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=\sqrt{2}$.
4. $\kappa=3$ ή $\kappa=-5$.
5. $y=x+1$ ή $y=-x-1$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (i) Ο κύκλος C_λ έχει κέντρο $K(\lambda,0)$ και ακτίνα $\sqrt{\lambda^2+1}$.

   (ii) Οι κύκλοι C_λ διέρχονται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(0,-1)$.
2. (i) $d(K_1,\varepsilon)=\dfrac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$, $d(K_2,\varepsilon)=\dfrac{|2\lambda+\beta|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$

   (ii) $\left(\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ και } \beta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ή

   $\left(\lambda=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ και } \beta=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.
3. (ii) (α) Η ημιευθεία $\begin{cases} y=2 \\ x\geq 1 \end{cases}$

   (β) Η παραβολή $y^2=2x$ με εξαίρεση την κορυφή της.
4. (i) $x^2+(y-2\beta)^2=\alpha^2(1+\lambda^2)$

   (ii) $\lambda=\pm\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{3}$
5. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$.
6. Κατά τη χρονική στιγμή t τα διανύσματα $\overrightarrow{OA_1}$ και $\overrightarrow{OA_2}$ θα έχουν συντεταγμένες $(4\text{συν}\omega t, 4\text{ημ}\omega t)$ και $(\text{συν}(-\omega t), \text{ημ}(-\omega t))$ αντιστοίχως.
7. Αν (x_0,y_0) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M, τότε

   $M_1\left(\dfrac{2x_0+y_0}{2}, y_0+2x_0\right)$,

   $M_2\left(\dfrac{2x_0-y_0}{2}, y_0-2x_0\right)$.

   Η υπερβολή έχει εξίσωση $4x^2-y^2=4$.
9. (i) $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και (ii) $\lambda\mu=-\dfrac{1}{2}$.
10. Αν M είναι το κέντρο του C, τότε

    (i) $d(M,K)-d(M,\varepsilon)=R$ (σταθερό)

    (ii) $d(M,K)+d(M,\Lambda)=R+\rho$ (σταθερό)

    (iii) $d(M,K)-d(M,\Lambda)=R-\rho$ (σταθερό).
11. (i) $\dfrac{x\text{συν}\varphi}{\alpha}+\dfrac{y\text{ημ}\varphi}{\beta}=1$

    (ii) $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$.

4 ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 4.1 Β΄ Ομάδας

3. Αρκεί να δείξουμε ότι $\left(\dfrac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu<\nu$ για κάθε $\nu\geq 3$.

§ 4.2 Α΄ Ομάδας

1. (i) $\kappa=7$ και $\upsilon=5$ (ii) $\kappa=-8$ και $\upsilon=5$

   (iii) $\kappa=-7$ και $\upsilon=6$ (iv) $\kappa=8$ και $\upsilon=5$.
2. (ii) Θέτουμε $2\kappa=\mu$.
3. Θέτουμε $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa\in\mathbf{Z}$.
4. Όχι.

§ 4.2 Β΄ Ομάδας

1. ($\beta=37$ και $\upsilon=31$) ή ($\beta=38$ και $\upsilon=14$)
2. Ο x θα είναι ή άρτιος ή περιττός.
3. Οι α^2,β^2 είναι της μορφής $\alpha^2=8\lambda+1$ και $\beta^2=8\mu+1$, όπου $\lambda,\mu\in\mathbf{N}$.
4. Ο κ είναι της μορφής $\kappa=5\lambda+\upsilon$, $\upsilon=0,1,2,3,4$.
5. (ii) Εφαρμόζουμε την (i) για τους α,β, x.

   (iii) Καθένας από τους αριθμούς είναι της μορφής $4\lambda+2$, $\lambda\in\mathbf{Z}$ και άρα δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.

§ 4.3 Α΄ Ομάδας

1. (i) 200, (ii) 40, (iii) 8, (iv) 1.
2. $\beta=\kappa\alpha$ και $\delta=\lambda\gamma$.
3. Ο 11 θα διαιρεί και τη διαφορά τους.
4. $\alpha=\beta+2\kappa$ όπου κ ακέραιος.
5. Με απαγωγή σε άτοπο.
6. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
   α) Δύο τουλάχιστον από τους α,β,γ είναι άρτιοι,
   β) Δύο τουλάχιστον από τους α,β,γ είναι περιττοί.

§ 4.3 Β΄ Ομάδας

1. (ii) Είναι $\alpha^2=4\lambda+1$, $\lambda\in\mathbf{N}$ και $(\lambda+1)(\lambda+2)=2\mu$, $\mu\in\mathbf{N}$.
2. Ο α είναι της μορφής $\alpha=2\kappa$ ή $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa\in\mathbf{Z}$.
3. Υποθέτουμε ότι για κάποιο α ισχύει $\alpha=\kappa^2$ και $\alpha+1=\lambda^2$, $\kappa,\lambda\in\mathbf{Z}$.
4. Θέτουμε $\alpha=\kappa\beta$.
5. (i) Ο α είναι της μορφής $\alpha=6\kappa+\upsilon$, $\upsilon=0,1,2,3,4,5$,
   (ii) Είναι: $2\alpha+1=(\alpha+2)+(\alpha-1)$,
   (iii) Είναι: $\alpha^3+3\alpha^2-4\alpha=(\alpha-1)\alpha(\alpha+4)=...$
6. Με μαθηματική επαγωγή
7. Αρκεί ο $\kappa-\lambda$ να διαιρεί τη διαφορά $(\lambda\alpha+\kappa\beta)-(\kappa\alpha+\lambda\beta)$.

§ 4.4 Α΄ Ομάδας

1. (i) 1 (ii) 12 (iii) 12 (iv) 12.
2. (i), (ii) Εφαρμόζουμε την ιδιότητα $(\alpha,\beta)=(\alpha-\beta,\beta)$,
   (iii) Ισχύει η (ii),
   (iv) Θέτουμε $\delta=(\nu+2,2)$,
   (v) Είναι $(\nu,\nu+1)=1$.
4. Θέτουμε $\delta=(\alpha+\beta,x+y)$
   και αποδεικνύουμε ότι $\delta|1$.

5,6. Θέτουμε δ το ΜΚΔ των αριθμών σε καθεμιά περίπτωση, οπότε ο δ θα διαιρεί και κάθε γραμμικό συνδυασμό τους.

7. Θέτουμε $\delta=(\alpha,\beta)$ και $\delta'=(\alpha,\beta,\alpha+\beta)$ και αποδεικνύουμε ότι $\delta|\delta'$ και $\delta'|\delta$.
8. (i) (ii) Θα ισχύει και για $\nu=\alpha$.
9. Θέτουμε $\delta_1=(\alpha,\gamma)$ και $\delta_2=(\beta,\gamma)$ και αποδεικνύουμε ότι $\delta_1|1$ και $\delta_2|1$.

§ 4.4 Β΄ Ομάδας

1. (i) Θέτουμε $\delta=(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$ και αποδεικνύουμε ότι $\delta|2$
   (ii) Θέτουμε $\delta=(2\alpha+\beta,\alpha+2\beta)$ και αποδεικνύουμε ότι $\delta|3$.
2. Είναι $\alpha=4\kappa+2$, $\kappa\in\mathbf{Z}$ και $\beta=4\lambda+2$, $\lambda\in\mathbf{Z}$.
3. Αποδεικνύουμε ότι $(2\nu+3,5\nu+7)=1$.
4. Θέτουμε $x=(\alpha,\beta)=[\alpha,\beta]$ οπότε $x|\alpha$, $x|\beta$, $\alpha|x$ και $\beta|x$.
5. Από $(\beta,\gamma)=30$ και $(\gamma,\alpha)=12$ έχουμε ότι $2|(\alpha,\beta)$, άτοπο.
6. Διαιρούμε και τα δύο μέλη με δ.
7. (i) Θέτουμε $\delta=(\alpha,\beta)$ και $\delta'=(\alpha,\kappa\beta)$ και αποδεικνύουμε ότι $\delta|\delta'$ και $\delta'|\delta$
   (ii) $[\alpha,\kappa\beta]=\dfrac{\alpha\cdot\kappa\beta}{(\alpha,\kappa\beta)}=...$.
8. $[\alpha\gamma,\beta\gamma,\alpha\delta,\beta\delta]=\big[[\alpha\gamma,\beta\gamma],[\alpha\delta,\beta\delta]\big]=...$

§ 4.5 Α΄ Ομάδας

1. Εφαρμόζουμε το πόρισμα 4.
2. (i) $\alpha=8$
   (ii) $\alpha=24$.
3. (i) Πρέπει $\alpha-\beta=1$, $\alpha+\beta=3$
   (ii) Πρέπει $\alpha-2=1$ και $\alpha+2=p$
   (iii) Πρέπει $\alpha-1=1$, $\alpha+1=3$ και $p=5$.
4. Είναι $3p=(\nu-1)(\nu+1)$.

5. Είναι $\nu^3-1=(\nu-1)(\nu^2+\nu+1)$ και $\nu^3+1=(\nu+1)(\nu^2-\nu+1)$.
6. Είναι $\alpha^2=4\kappa+1$ και $\beta^2=4\lambda+1$.
7. Θα ισχύει $p|\alpha$ και άρα $\alpha=\kappa p$, $\kappa\in\mathbf{Z}$.
8. Αν ήταν $(\alpha^\mu,\alpha^\nu)\neq 1$ τότε θα υπήρχε θετικός πρώτος διαιρέτης p του (α^μ,α^ν).
10. Αν $\alpha=\beta^2$, τότε η κανονική μορφή του β θα είναι $\beta=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_\kappa^{\beta_\kappa}$.

§ 4.5 Β΄ Ομάδας

1. Υποθέτουμε κάθε φορά ότι ο ΜΚΔ είναι μεγαλύτερος της μονάδας, οπότε θα έχει έναν θετικό πρώτο διαιρέτη p, και καταλήγουμε σε άτοπο.
2. Όπως και στην 1.
3. Είναι $\alpha=pA$ με $p\nmid A$ και $\beta=p^2\cdot B$ με $p\nmid B$.
4. (i) $\nu^4+4=(\nu^4+4\nu^2+4)-4\nu^2$
   $=(\nu^2+2)^2-(2\nu)^2=...$
   (ii) $8^\nu+1=(2^\nu)^3+1=x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ με $x=2^\nu$.
5. Είναι $34\alpha=43\beta$, οπότε $34|\beta$.
6. Ο p θα είναι της μορφής $p=3\kappa+\upsilon$, $\upsilon=0,1,2$.
7. (i) Είναι $x(x^2+x+1)=1\cdot 3$
   (ii) Είναι $p=112-x(x+1)$ άρτιος.
8. Οι αριθμοί α,β θα είναι της μορφής $\alpha=p_1^{\alpha_1}...p_\kappa^{\alpha_\kappa}$ και $\beta=p_1^{\beta_1}...p_\kappa^{\beta_\kappa}$ όπου $p_1,p_2,...,p_\kappa$ είναι οι κοινοί και μη κοινοί πρώτοι παράγοντες των α και β.

§ 4.6 Α΄ Ομάδας

1. Οι (ii), (iii), (iv).
2. (i) $x=1+3t$ και $y=1-2t$, $t\in\mathbf{Z}$,
   (ii) $x=2+2t$ και $y=1+3t$, $t\in\mathbf{Z}$,
   (iii) $x=2+5t$ και $y=-1+7t$, $t\in\mathbf{Z}$,
   (iv) $x=2+3t$ και $y=1+5t$, $t\in\mathbf{Z}$.
3. (i) $x=2-26\lambda$, $y=1+37\lambda$, $\lambda\in\mathbf{Z}$,
   (ii) $x=31\kappa+1$, $y=47\kappa-1$, $\kappa\in\mathbf{Z}$.
4. (i) Αν είχε θετική ακέραια λύση θα ίσχυε $3x+5y\geq 3+5=8\neq -15$, άτοπο (ii), (iii) ομοίως.
5. Με (1,18), (2,16), (3,14),…(9,2), (10,0).

§ 4.6 Β΄ Ομάδας

1. $(11,5)$.
2. $100=56+44$.
3. $\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\delta}$, όπου $\delta=(\alpha,\beta)$.
4. Αφού λύσετε την εξίσωση πάρτε $x>0$ και $y>0$.
5. $\dfrac{33}{91}=\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{13}$.

§ 4.7 Α΄ Ομάδας

2. (i), (ii), (iv).
3. Ο α θα είναι της μορφής $\alpha=11\kappa+6$, $\kappa\in\mathbf{Z}$.
4. (i) Θα ισχύει $\alpha=3\kappa+2=4\lambda+1$
   (ii) Δεν υπάρχουν.
5. Είναι (i) $2^3\equiv 1(\text{mod}7)$, (ii) $9\equiv 1(\text{mod}8)$
   (iii) $3^3\equiv -1(\text{mod}7)$ και
   (iv) $5^2\equiv -1(\text{mod}26)$.
6. Είναι (i) $5^2\equiv 1(\text{mod}8)$, (ii) $3^3\equiv 2(\text{mod}5)$,
   (iii) $2^4\equiv 1(\text{mod}15)$, (iv) $5^2\equiv 4(\text{mod}21)$.
7. Είναι (i) 9 (ii) 43.

§ 4.7 Β΄ Ομάδας

1. Για κάθε $x\in\mathbf{Z}$ ισχύει $x^2\equiv 0,1(\text{mod}3)$.
2. Είναι $p\equiv 1,3,7,9(\text{mod}10)$.
3. Είναι $\alpha=5\kappa+2$, $\kappa\in\mathbf{Z}$
4. $x=2\kappa+1=3\lambda+2$ (Διοφαντική εξίσωση).
5. (i) $\alpha\equiv 0,1,2,...,5(\text{mod}6)$
   (ii) $\alpha^5\equiv\alpha(\text{mod}2)$ και $\alpha^5\equiv\alpha(\text{mod}5)$.

6. (i) $m|(\alpha-\beta)$, (ii) $m|n(\alpha-\beta)$
7. Είναι $\alpha=\beta+\lambda\cdot m$, $\lambda\in\mathbf{Z}$.
8. (i) Είναι $39=3\cdot 13$ με $(3,13)=1$.
   (ii) $111\equiv-19\bmod 7)$ και $333\equiv 4(\bmod 7)$.
9 (ii) Με απαγωγή σε άτοπο.
10. $p\equiv 1,2(\bmod 3)$.
11. Αρκεί $3|(p^2-q^2)$ και $8|(p^2-q^2)$.
12. $77\equiv 7(\bmod 10)$ και $333\equiv 3(\bmod 10)$.
13. $2\equiv -1(\bmod 3)$.
14. (i) $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)=1$ (ii) $\left(\frac{\alpha}{4},\frac{\beta}{4}\right)=1$
   (iii) $(\alpha,\beta)=4$ (iv) $\alpha\beta=96$
   (v) Αν $(\alpha,\beta)=\delta$, τότε $\left(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta}\right)=1$.
15. Οι α,β είναι της μορφής $\alpha=p_1^{\alpha_1}...p_\kappa^{\alpha_\kappa}$ και $\beta=p_1^{\beta_1}...p_\kappa^{\beta_\kappa}$ με $\beta_i,\alpha_i\geq 0$.
16. Οι α,β δεν έχουν κοινούς πρώτους παράγοντες.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Παίρνουμε τους αριθμούς $\alpha,\alpha+1,...,\alpha+(\nu-1)$.
2. $\alpha=6,\beta=3,\gamma=6$ καθώς και $\alpha=14$, $\beta=9$ και $\gamma=1$.
3. Παίρνουμε τους αριθμούς $\alpha,\alpha+2,\alpha+4,...,\alpha+2(\nu-1)$, όπου α περιττός.
4. (ii) Υποθέτουμε ότι $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\rho\in\mathbf{Z}$ οπότε $\alpha^2+\beta^2=\rho\alpha\beta$.
5. (i) Με απαγωγή σε άτοπο. Αν $(\alpha,\beta)=\delta$ τότε $\left(\frac{\alpha}{\delta},\frac{\beta}{\delta}\right)=1...$.
   (ii) Χρησιμοποιούμε το (i).
6. Με απαγωγή σε άτοπο.
7. (i) Με τη μαθηματική επαγωγή
   (ii) Ο x θα είναι της μορφής 2^κ.
8. (i) $\alpha^\nu-1=(\alpha-1)(\alpha^{\nu-1}+...+\alpha+1)$
   (ii) Υποθέτουμε ότι $\nu=2^\kappa\cdot\lambda$, όπου λ περιττός >1.
9. (i) $\alpha\equiv\upsilon(\bmod 8)$, $\upsilon=0,1,...,7$
   (ii) Με απαγωγή σε άτοπο και με τη βοήθεια της (i)
10. $100=4\cdot 25$, με $(4,25)=1$.
11. $2\nu=2(\nu-2)+4$.
12. $x^2=y^2+24$
13. Όχι.

5 *ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ*

§ 5.1, 5.2 Α΄ Ομάδας

1. α) 6 β) $-\frac{3}{2}$.
2. α) $x=1$, $y=2$ β) -2 γ) $x=-15$, $y=27$.
4. α) $y'y$ β) $x'x$ γ) $y=x$.
5. α) $3+4i$ β) $-3-6i$ γ) 0 δ) $2+23i$ ε) $-3+18i$ στ) 25 ζ) $1+7i$.
6. α) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ β) -1 γ) $2i$
   δ) $-2+2\sqrt{3}i$ ε) $1+i$ στ) $\frac{4}{3}-\frac{7\sqrt{2}}{3}i$
7. α) αδύνατο β) $x=\frac{2}{5},y=-\frac{1}{5}$
   γ) $x=-\frac{1}{2},y=0$
8. α) 0 β) $2i$
9. α) $-5-7i$ β) $-4+9i$ γ) $-4i$
   δ) 11 ε) i στ) 0
10. α) ως προς άξονα $x'x$ β) ως προς κέντρο $O(0,0)$ γ) ως προς άξονα $y'y$.
11. $z_2=\bar{z}_1$.
12. α) $y=3$ β) $x'x$ και $y'y$ γ) διχοτόμοι δ) $x=1$.

13. α) 1,2 β) $1\pm i\sqrt{2}$ γ) $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. $\beta=-12$, $\gamma=26$.

§ 5.1, 5.2 Β΄ Ομάδας

1. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}=0$.
2. 2
3. 0
4. -2, 0, 2
5. α) 0, 1, $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ β) 0, ±1, $\pm i$.
6. $z=x+yi$ κτλ.
7. $\beta-\alpha i=-i(\alpha+\beta i)$ κτλ.
8. α) $z=x+yi$ κτλ. β) αρκεί να δείξετε ότι $u=\bar{u}$, $v=-\bar{v}$
9. α) $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ ή $y'y$ εκτός του $O(0,0)$

   β) $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ ή $x'x$ εκτός του $O(0,0)$

§ 5.3 Α΄ Ομάδας

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 5, 5, 5, 4, 1, 8, 5, $\frac{\sqrt{10}}{5}$.
2. 2, 1, 1, 1.
3. α) $z\in\mathbf{R}$ β) $\frac{1}{2}$ γ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. α) $x^2+y^2=1$ β) $x^2+(y-1)^2=1$

   γ) $(x+1)^2+(y+2)^2=9$

   δ) Κυκλικό δακτύλιο

   ε) Εκτός κύκλου $x^2+y^2=2$.
5. α) Στη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα A(-1,0), B(0,2).

   β) Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετο του AB και το B όπου A(0,1) και B(-1,0).
6. Ο μοναδιαίος κύκλος
7. $2i$, $6i$
8. $|w-1|=2$.
9. $|z|^2=z\bar{z}$ κτλ.

§ 5.3 Β΄ Ομάδας

1. Αν $z=x+yi$, τότε $\text{Re}(z)=x$, $\text{Im}(z)=y$ κτλ.
2. $w=-\bar{w}$ κτλ.
3. $w=\bar{w}$ κτλ.
4. $w=-\bar{w}$ κτλ.
5. Αρκεί $|w|=1$
6. $|z|=1$
7. 4
8. $y=\frac{1}{4}x-\frac{15}{8}$, $\left(\frac{15}{34},-\frac{60}{34}\right)$
9. Αν $z_2=x_2+y_2 i$, τότε $\frac{x_2^2}{5^2}+\frac{y_2^2}{3^2}=1$.
10. α) $|z|^2=1\Leftrightarrow z\bar{z}=1$ β) $\frac{1}{z_1}=\bar{z}_1$, $\frac{1}{z_2}=\bar{z}_2$ κτλ.

§ 5.4 Α΄ Ομάδας

1. α) $2\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)$

   β) $2\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

   γ) $2\left(\text{συν}\frac{4\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{4\pi}{3}\right)$

   δ) $2\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right)$

   ε) $4(\text{συν}0+i\text{ημ}0)$

   στ) $4(\text{συν}\pi+i\text{ημ}\pi)$.
2. α) $12\sqrt{2}(1+i)$

   β) $10i$

   γ) i
3. α) $\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i$ β) $6i$ γ) $-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$.
4. α) $4+4\sqrt{3}i$ β) 3^8 γ) 1.
5. i.

6. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

7. $2^{\nu+1}συν\frac{\nu\pi}{6}$.

8. Στροφή κατά γωνία $-\frac{\pi}{2}$.

9. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

10. 2 και $\frac{2\pi}{3}$ ή 2 και $\frac{4\pi}{3}$.

§ 5.4 Β΄ Ομάδας

1. α) 1 και $\nu\theta$ β) -1
2. Να γράψετε τους $1+i$, $1-i$ σε τριγωνομετρική μορφή.
3. Να εργαστείτε με διανυσματικές ακτίνες.
4. α) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$, $x>0$

   β) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y>0$

   γ) $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, εκτός του $O(0,0)$.
5. α) $5i$ β) $-\frac{100}{29}+\frac{105}{29}i$.
6. Να εφαρμόσετε το θεώρημα του De Moivre.
7. α) $|w|=2$ β) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.
8. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
9. Πρέπει $\Delta\leq 0$.

§ 5.5 Α΄ Ομάδας

1. α) Κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου
   β) Κορυφές τετραγώνου
   γ) Κορυφές κανονικού εξαγώνου.
2. α) $-i=συν\frac{3\pi}{2}+iημ\frac{3\pi}{2}$ κτλ.

   β) $z_\kappa=2\left[συν\left(\frac{2\kappa\pi+\frac{4\pi}{3}}{4}\right)+iημ\left(\frac{2\kappa\pi+\frac{4\pi}{3}}{4}\right)\right]$,

   $\kappa=0,1,2,3$

   γ) $z_\kappa=3\left[συν\left(\frac{2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}}{5}\right)+iημ\left(\frac{2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}}{5}\right)\right]$

   $\kappa=0,1,2,3,4$
3. α) $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}=συν\frac{\pi}{4}+iημ\frac{\pi}{4}$ κτλ.

   β) $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=συν\frac{5\pi}{3}+iημ\frac{5\pi}{3}$ κτλ.

   γ) $-64=64(συν\pi+iημ\pi)$ κτλ.
4. α) $z^3+3z^2+4z=8 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+4z+8)=0$ κτλ.

   β) Να θέσετε $z^2=w$, $\pm i$, $\pm 2i$.
5. $2-i$, $-\frac{2}{3}$
6. 4
7. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την: $x^6=1$, $x\neq 1$.
8. Οι ρίζες είναι -3 και $\pm i\sqrt{3}$.

§ 5.5 Β΄ Ομάδας

1. α) Είναι $1-i=\sqrt{2}\left(συν\left(-\frac{\pi}{4}\right)+iημ\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

   β) Η εξίσωση γράφεται $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3=1-i$.
2. Η εξίσωση γράφεται $(z+1)^2(z^2+z+1)(z^2-z+1)=0$ κτλ.
3. Έχουμε $z^7+1=0 \Leftrightarrow z^7=συν\pi+iημ\pi$ κτλ.
4. $\pm\iota$
5. 1, i, -1, -i
6. Να πάρετε τα μέτρα και των δύο μελών της εξίσωσης.
7. α) 2, 4, -4, β) p=4, q=16 .

8. α) $\frac{1}{συνθ} \pm 2iεφθ$ β) $x^2 - \frac{y^2}{2^2} = 1$

9. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $(x^4-1)(x^5-1)=0$ κτλ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. β) $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{α}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{β}\right)^2} = 1$.

2. $x^2 - y^2 = 1$.

3. α) $y=3x-7$ β) $y=3x-9$ γ) $A\left(\frac{27}{10}, -\frac{9}{10}\right)$

4. α) Τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο $K\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ και ακτίνα $ρ=\frac{\sqrt{5}}{3}$

   β) Τα σημεία της παραβολής $y^2 = 4x$.

6. Να πάρετε τα μέτρα και των δύο μελών της εξίσωσης.

7. α) Οι τιμές του τριωνύμου είναι ομόσημες του $α$

   β) Είναι γινόμενο δύο συζυγών πραστάσεων.

8. Να εξισώσετε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του αθροίσματος $1+z_1+z_2+...+z_{ν-1}=0$ με το μηδέν.